Développement asymptotique de la série harmonique

Leçons 223,230

Théorème (Développement asymptotique de la série harmonique)

$$\text{Si on note pour tout} n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\text{Alors on a: } H_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où $\gamma > 0$.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer le lemme suivant: Pour tout $\alpha > 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

   à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

2. En considérant $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$, montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite $\gamma > 0$.

3. En utilisant le lemme et une sommation d'équivalents, trouver les deux autres termes.

Lemme

Soit $\alpha > 1$. On a l'équivalent suivant:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Démonstration. *On effectue une comparaison série-intégrale. Pour $N > n \in \mathbb{N}^*$, on a:*

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \tag{1}$$

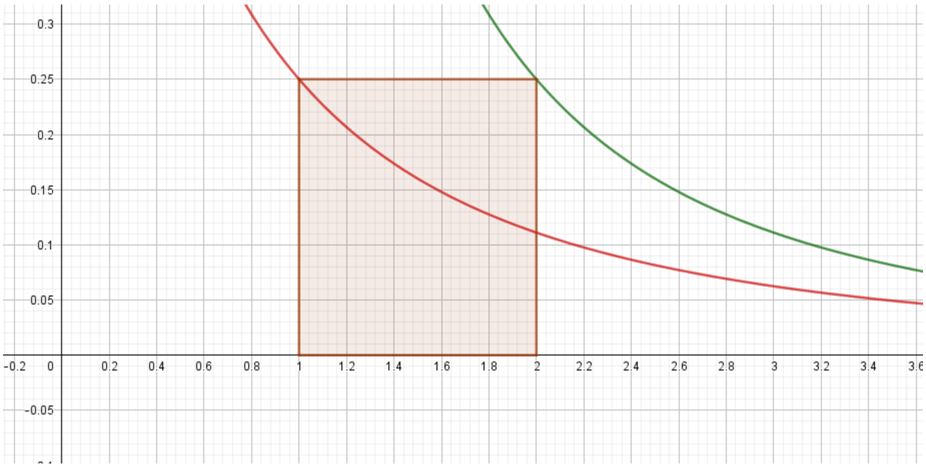

Figure 1: Illustration de l'inégalité (1) par comparaison série-intégrale, pour $n = 2$ et $\alpha = 2$.

Par sommation entre $n+1$ et N, on obtient:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

Donc: $\displaystyle \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right] \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]$

Lorsque $N \longrightarrow +\infty$, $\displaystyle \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Puisque $(n+1)^{\alpha-1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}$, *on en déduit que:*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

■

On va pouvoir maintenant démontrer le théorème à proprement parler:

Démonstration. - *Vérifions les hypothèses des suites adjacentes pour (u_n) et (v_n):*

- ⋆ *D'abord, nous avons:* $u_n - v_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- ⋆ *Ensuite,* $u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) = \frac{-1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{-1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. *Donc* $u_n - u_{n+1} \geqslant 0$ *via l'inégalité de convexité* $\ln(1-X) \leqslant -X$ *pour tout* $X \geqslant 0$. *Donc (u_n) est décroissante.*
- ⋆ *Enfin,* $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. *Donc* $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, *toujours via la même inégalité de convexité venant du logarithme. Donc (v_n) est croissante.*

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, ces deux suites convergent vers une même limite que l'on note γ, vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$, donc on a: $\gamma \geqslant v_2 = H_2 - \ln(2) - \frac{1}{2} = 1 - \ln(2) > 0$.

$$\textit{Donc il existe } \gamma > 0 \textit{ tel que: } \quad H_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

- *On peut maintenant montrer le résultat principal du théorème:*

$\star$ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose: $t_n = u_n - \gamma$.*

$$\textit{On a:} \quad t_n - t_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \longrightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, $t_n - t_{n-1} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$, et, par le théorème de "sommation des restes", on a:

$$-t_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k+1}) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \overset{\textit{Lemme}}{\underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim}} -\frac{1}{2n}$$

$$\textit{D'où:} \quad H_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\star$ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose: $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$.*

$$\textit{On a:} \quad w_n - w_{n-1} = t_n - t_{n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$$

Déterminons un équivalent de $w_n - w_{n-1}$ à l'ordre 3.
On développe le logarithme:

$$w_n - w_{n-1} \underset{n \longrightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

On développe la fraction $\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$:

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &\underset{n \longrightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &\underset{n \longrightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n \longrightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Là encore, on utilise le théorème de sommation des équivalents, donnant ainsi:

$$-w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1}) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{Lemme}{\sim}} \frac{1}{12n^2}$$

$$\textit{D'où:} \quad -H_n + \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

On a l'équivalent demandé:

$$H_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

■

Reférence. *S.Francinou, H.Gianella, S.Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 1*