Séries génératrices et lois disrcètes usuelles

Leçons 243,264

Voici le plan du développement (ici $\lambda > 0, n \in \mathbb{N}*, p \in \,]0,1[\,, t \in]-1,1]$ si non précisé):

- Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$ et appliquer au calcul de G_X pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \mathcal{B}(n,p), \mathcal{G}(p)$
- Montrer les relations liant $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ à G'_X, G''_X et les appliquer aux calculs de $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

Proposition (Somme de deux variables aléatoires indépendantes)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$

Démonstration. *Soit $t \in]-1,1]$. On a:*

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n \text{ et } G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)t^n$$

A l'aide d'un produit de Cauchy, on a:

$$\begin{aligned} G_X(t) \cdot G_Y(t) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)t^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)t^k t^{n-k} \qquad (1) \end{aligned}$$

X et Y sont indépendantes donc $\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = \mathbb{P}\left(\{X=k\} \cap \{Y=n-k\}\right)$, et on obtient alors:

$$\begin{aligned} G_X(t) \cdot G_Y(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\{X=k\} \cap \{Y=n-k\}\right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} \{X=k\} \cap \{Y=n-k\}\right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n)t^n \end{aligned}$$

soit $G_X \cdot G_Y = G_{X+Y}$

■

Remarque. *L'utilisation du produit de Cauchy est justifiée puisque le terme général de* 1 *est* $\mathbb{P}(X+Y=n)$*, donc on a convergence absolue de la série.*

Application (Lois discrètes)

1. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$. De plus, si $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$
2. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(t) = (1+p(t-1))^n$
3. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

Démonstration.
1 - Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$*, alors*

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$$

Donc $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$ *et* $G_{X+Y}(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$*, d'où* $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

2 - Soit $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$*. Alors* $G_{X_1}(t) = 1-p+pt = 1+p(t-1)$*. Si* $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{B}(p)$ *sont i.i.d, alors:*

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim \mathcal{B}(n,p)$$

Donc $G_X(t) = G_{X_1}(t)^n = (1+p(t-1))^n$

3 - Si $X \sim \mathcal{G}(p)$*, alors*

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n = pt\sum_{n=0}^{+\infty}[(1-p)t]^n = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

■

Proposition (Fonction génératrice et moments d'ordre 1 et 2)

1. $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$
2. $\mathbb{E}\left[X^2\right] = G''_X(1) + G'_X(1)$

Démonstration. G_X *est anaytique sur* $]-1,1]$*, donc est régulière, et, par convergence uniforme des séries génératrices sur* $]-1,1]$ *(théorèe d'Abel), on peut librement intervertir séries et dérivation.*

1 - On a:

$$G'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n)t^{n-1}$$

soit:

$$G'_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}[X]$$

2 - En dérivant à nouveau, on a:

$$G''_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)t^{n-2}$$

et, par le théorème de transfert, on obtient:

$$G''_X(1) + G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}\left[X^2\right]$$

■

Application (Espérence et variance de lois discrètes)

1. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$
2. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}[X] = np$ et $Var(X) = np(1-p)$
3. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Démonstration.
1 - Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ donc, en dérivant:

$$\begin{aligned} G'_X(t) &= \lambda e^{\lambda(t-1)} \\ G''_X(t) &= \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

soit $G'_X(1) = \lambda$ et $G''_X(1) = \lambda^2$.

On a donc $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \lambda^2 + \lambda$ soit $Var(X) = \lambda$.

2 - Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $G_X(t) = (1+p(t-1))^n$ donc, en dérivant:

$$\begin{aligned} G'_X(t) &= np\,(1+p(t-1))^{n-1} \\ G''_X(t) &= n(n-1)p^2\,(1+p(t-1))^{n-2} \end{aligned}$$

d'où $G'_X(1) = np$ et $G''_X(1) = n(n-1)p^2$.

Après calcul, on obtient: $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathbb{E}\left[X^2\right] = n(n-1)p^2 + np$ soit $Var(X) = np(1-p)$

3 - Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ *donc, en dérivant:*

$$\begin{aligned} G'_X(t) &= \frac{p}{1-(1-p)t} + \frac{p(1-p)t}{(1-(1-p)t)^2} \\ G''_X(t) &= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^2} + \frac{2p(1-p)^2 t}{(1-(1-p)t)^3} \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient $G'_X(1) = \frac{1}{p}$ *et* $G''_X(1) = \frac{2(1-p)}{p^2}$, *donc* $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ *et* $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{2-p}{p^2}$, *soit* $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

■