

Simplicité de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Leçons 103,106,108,160,203,204

Théorème (Simplicité de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$)

Le groupe de matrices:

$$\mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : PP^T = I_3, \det(P) = 1\}$$

est simple

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer que $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact et connexe (pour les leçons 103,106,203,204)
2. Montrer que $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements (leçons 108,160)
3. Montrer la simplicité du groupe $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Lemme

$\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact et connexe

Démonstration. - On montre la compacité: Par définition de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, on peut écrire:

$$\mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_3\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$$

où l'application φ est donnée par:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto MM^T \end{aligned}$$

φ et \det sont polynomiales en les coefficients des matrices donc sont continues. Donc $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est fermé comme intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues, donc $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est fermé. De plus, l'application:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \text{Tr}(MM^T) \end{aligned}$$

est une norme, appelée norme de Frobenius

On a ainsi: $\forall P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}), \|P\| = \text{Tr}(PP^T) = \text{Tr}(I_3) = 3$ donc $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est borné. Il est fermé borné donc compact (on est en dimension finie, il n'y a aucun problème, y compris du point de vue de la norme choisie, puisqu'elle sont toutes équivalentes).

- On montre la connexité: Soit $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Par le théorème de réduction des endomorphismes normaux, il existe $Q \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que:

$$M = Q \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^T$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$. Soit $t \in [0, 1]$, posons alors:

$$M_t = Q \begin{bmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) & 0 \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^T$$

Soit alors:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto M_t \end{aligned}$$

γ est continue, avec $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, $\gamma(0) = I_3$ et $\gamma(1) = P$. $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, donc connexe. ■

Lemme

Les retournements engendrent $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Si $P = I_3$, alors on a:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2$$

Supposons que $P \neq I_3$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $Px \neq x$. Considérons alors le plan $H = \text{Vect} \{(P - I_3)x\}^\perp$.

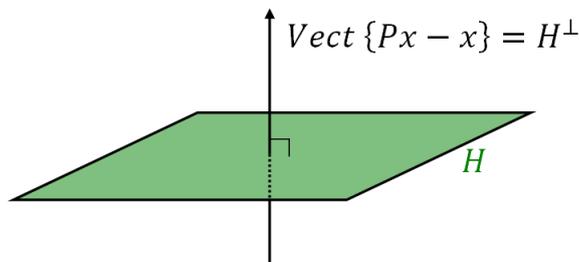


Figure 1: Illustration de la décomposition $\mathbb{R}^3 = H \oplus H^\perp$

On a une décomposition de Px sur $H \oplus H^\perp$:

$$Px = \underbrace{\frac{1}{2}(P - I_3)x}_{\in H^\perp} + \underbrace{\frac{1}{2}(P + I_3)x}_{\in H}$$

Soit s_H la symétrie orthogonale par rapport au plan H . C'est une réflexion orthogonale. Alors, si S_H est la matrice de s_H dans une bonne base, on a: $S_HP x = x$. Donc S_HP fixe aussi x^\perp , qui est un plan. Donc, en identifiant matrices et applications linéaires, on a: $S_HP|_{x^\perp} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. C'est soit une rotation, soit une réflexion. Toute rotation est composée de deux réflexions, donc on écrit: $S_HP|_{x^\perp} = S_1 S_2$ ou S_1 , avec $S_1, S_2 \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, en prolongeant S_1, S_2 à \mathbb{R}^3 , en l'identité sur $\text{Vect}\{x\}$, i.e. en les matrices:

$$\tilde{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}, \tilde{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

On a donc: $S_HP = \tilde{S}_1 \tilde{S}_2$ ou \tilde{S}_1 donc $P = S_H \tilde{S}_1 \tilde{S}_2$ ou $S_H \tilde{S}_1$

$P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, et toute réflexion orthogonale étant de déterminant 1, on a donc: $P = S_H \tilde{S}_1$. Or, l'opposé d'une réflexion est un retournement orthogonal, donc $P = (-S_H)(-S_H \tilde{S}_1)$ est un produit de retournements. $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est donc engendré par les retournements. ■

Lemme

Soit $H \triangleleft \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe distingué. Si H contient un retournement (rotation d'angle π), alors il les contient tous

Démonstration. Soit r_D un retournement de droite D (axe de la rotation) et soit $r_{D'} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ un retournement de droite D' . Soit $\rho : D \rightarrow D' \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ une rotation. Alors $\rho r_D \rho^{-1} = r_{D'} \in H$ puisque $H \triangleleft \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

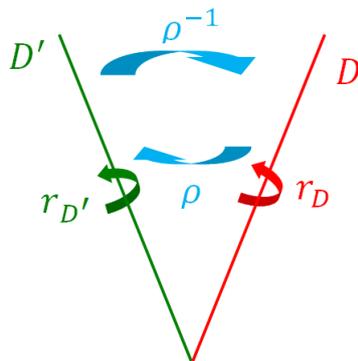


Figure 2: Illustration de la relation $\rho r_D \rho^{-1} = r_{D'}$ ■

On démontre enfin le théorème de simplicité de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ à proprement parler:

Démonstration. Soit $H \triangleleft \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $H \neq \{I_3\}$. Montrons alors que $H = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Montrons que H contient un retournement. Soit $h \in H$ tel que $h \neq I_3$. Considérons alors l'application:

$$\begin{aligned} \varphi_h : \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \text{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) \end{aligned}$$

φ_h est polynomiale en les coefficients matriciels donc est continue. $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact, connexe, donc, par continuité de φ_h , son image est un compact, connexe de \mathbb{R} , i.e. $\varphi_h(\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ où $a \leq 3$.

- Si $a = 3$, alors $\varphi_h(\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})) = \{3\}$, donc, comme pour tout $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, il existe $Q \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que:

$$P = Q \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^T$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$. Si $\text{Tr}(P) = 1 + 2\cos \theta = 3$, alors $\theta = 0$ et $P = I_3$. Donc, pour tout $g \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, $ghg^{-1}h^{-1} = I_3$, donc $h \in Z(\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})) = \{I_3\}$, ce qui est absurde.

- On a donc $a < 3$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que: $a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$. Donc il existe $g_n \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_h(g_n) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Soit $h_n = g_n g g_n^{-1} h^{-1}$. h_n est une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$, donc h_n^n est une rotation d'angle π , i.e. un retournement. Comme $h \in H$, $g_n \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ et $H \triangleleft \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, on a $h_n \in H$ et $h_n^n \in H$. H contient un retournement, donc les contient tous d'après le lemme précédent. Comme $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, on obtient $H = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, ce qui conclut. ■

Référence(s). - P.Caldero, J.Germoni, *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et Géométries*

- D.Perrin, *Cours d'algèbre*