Table de caractères de S_4

Leçon 107

Proposition

On rappelle que les cinq classes de conjugaison du groupe symétrique S_4 sont:

- $\star$ Le neutre, noté C_{Id}, de cardinal 1.
- $\star$ Les transpositions, notée $C_{(..)}$, de cardinal 6.
- $\star$ Les 3-cycles, notée $C_{(...)}$, de cardinal 8.
- $\star$ Les 4-cycles, notée $C_{(....)}$, de cardinal 6.
- $\star$ Les bitranspositions, notée $C_{(..)(..)}$, de cardinal 3.

Théorème (Table de caractères de S_4)

La table de caractères de S_4 est donnée par:

χ	C_{Id}	$C_{(..)}$	$C_{(...)}$	$C_{(....)}$	$C_{(..)(..)}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_{Δ_4}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{C_8}^{+}$	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Nous allons donner une preuve "géométrique" de ce théorème, en ne se contentant pas de remplir les cases, mais en illustrant chaque représentation irréductible.

Démonstration. - *La première représentation est la représentation triviale:*

$$\rho_1 : \begin{array}{ccc} S_4 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Donc, le caractère associé, noté χ_1, est donné, pour tout $\sigma \in S_4$, par $\chi_1(\sigma) = 1$. C'est une représentation de dimension 1.

- *La seconde représentation est la représentation signature:*

$$\rho_\varepsilon : \begin{array}{ccc} S_4 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}$$

Donc, le caractère associé, noté χ_ε, est donné, pour tout $\sigma \in S_4$, par $\chi_\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$. On peut facilement compléter la seconde ligne du tableau puisque le neutre, les 3-cycles et les bitranspositions sont pairs, les transpositions et 4-cycles sont impairs. C'est une représentation de dimension 1.

- *Passons à présent aux choses sérieuses. On sait que* $S_4 = Iso(\Delta_4)$*, c'est le groupe d'isométries du tétraèdre (régulier) en dimension* 3*, donnant ainsi cette représentation:*

$$\begin{array}{rccc} \rho_{\Delta_4} : & S_4 & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}^3) \\ & \sigma & \longmapsto & Q_\sigma \end{array}$$

où Q_σ *est une isométrie de* Δ_4 *correspondant à* σ*. Pour déterminer* χ_{Δ_4}*, il suffit de calculer la trace de* Q_σ *en fonction de la classe de conjugaison dans laquelle se trouve* σ *(les caractères sont constants sur les classes de conjugaison). Le tétraèdre de référence* Δ_4 *est constitué des sommets* A_1, A_2, A_3 *et* A_4*, et appliquer* Q_σ *à* Δ_4 *revient à obtenir les sommets* $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}$ *et* $A_{\sigma(4)}$*.*

- ⋆ $\rho_{\Delta_4}(Id) = I_3$*, donc* $\chi_{\Delta_4}(Id) = 3$.
- ⋆ *Appliquer la permutation* (12) *revient à faire une réflexion par rapport au plan orthogonal à la droite* (A_1A_2)*, donc, dans une certaine base:*

$$\rho_{\Delta_4}((12)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et alors, $\chi_{\Delta_4}((12)) = 1$.

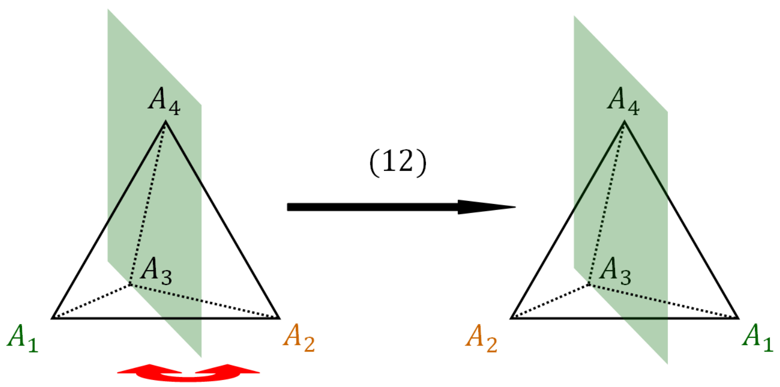

Figure 1: Transposition (12) agissant sur Δ_4 via une réflexion.

- ⋆ *Appliquer la permutation* (123) *revient à faire une rotation d'angle* $\frac{2\pi}{3}$ *dans le plan engendré par les points* A_1, A_2 *et* A_3*, donc, dans une certaine base:*

$$\rho_{\Delta_4}((123)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

et ainsi, $\chi_{\Delta_4}((123)) = 1 + 2\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{=-\frac{1}{2}} = 0.$

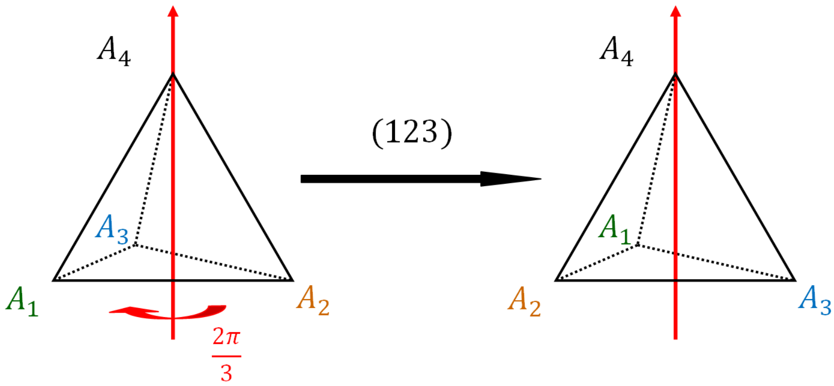

Figure 2: 3-cycle (123) agissant sur Δ_4 via une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

⋆ *Appliquer le 4-cycle* (1234) *revient à appliquer une réflexion selon un plan parallèle à* (A_1A_3) *et* (A_2A_4)*, puis une rotation d'un quart de tour* ($\frac{\pi}{2}$) *le long de l'axe passant par les milieux des segments* $[A_1A_3]$ *et* $[A_2A_4]$*. Donc, dans une certaine base:*

$$\rho_{\Delta_4}((1234)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où $\chi_{\Delta_4}((1234)) = -1$.

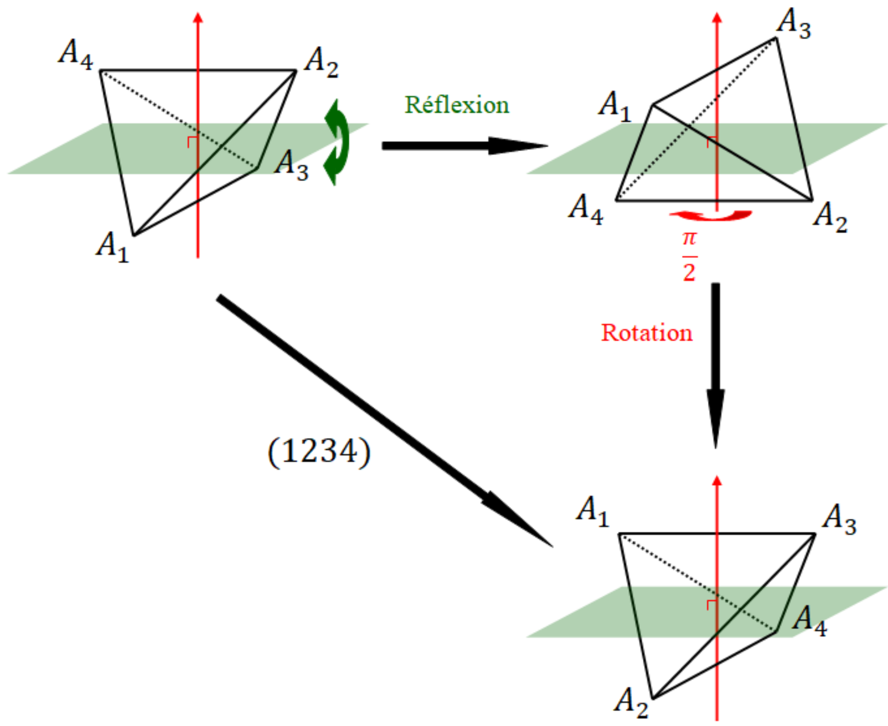

Figure 3: 4-cycle (1234) agissant sur Δ_4 via une réflexion suivie d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

⋆ *Appliquer la bitransposition* (12)(34) *revient à faire une rotation d'angle* π *(un demi-tour), dans le plan parallèle à* (A_1A_2) *et* (A_3A_4) *afin d'échanger les points* A_1 *et* A_2*,* A_3 *et* A_4*. Donc, dans une certaine base:*

$$\rho_{\Delta_4}((12)(34)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc $\chi_{\Delta_4}((12)(34)) = -1$.

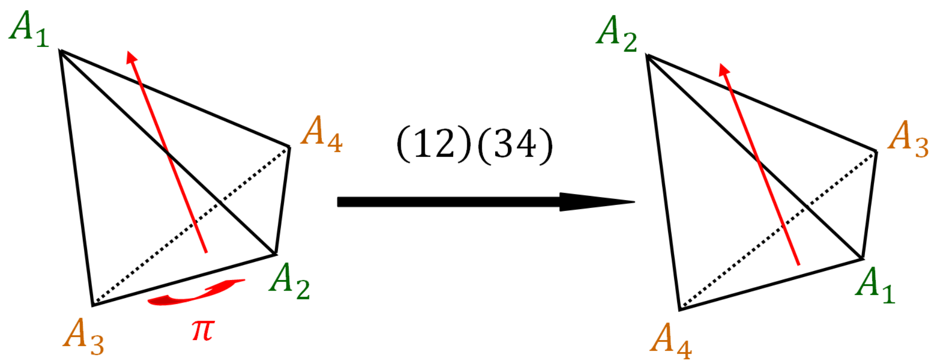

Figure 4: bitransposition (12)(34) agissant sur Δ_4 via une rotation d'angle π.

- *On sait que* $S_4 = Iso^+(C_8)$, *c'est le groupe d'isométries positives du cube en dimension* 3, *donnant ainsi cette représentation:*

$$\begin{array}{rccc} \rho^+_{C_8} : & S_4 & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}^3) \\ & \sigma & \longmapsto & R_\sigma \end{array}$$

Le fait que S_4 *soit le groupe d'isométries positives de* C_8 *revient à permuter les grandes diagonales du cube, notées* D_1, D_2, D_3 *et* D_4. *La encore, la stratégie est de déterminer la trace de* R_σ *en fonction de la classe de conjugaison dans laquelle se trouve* σ. *Ainsi, appliquer* σ, *ou* R_σ *comme isométrie positive à* C_8 *revient à passer de* D_1, D_2, D_3, D_4 *à* $D_{\sigma(1)}, D_{\sigma(2)}, D_{\sigma(3)}, D_{\sigma(4)}$.

⋆ $\rho^+_{C_8}(Id) = I_3$ *donc* $\chi^+_{C_8}(Id) = 3$.

⋆ *Appliquer* (12) *à* C_8 *revient à faire une rotation d'angle* π *pour échanger* D_1 *et* D_2, *donc, dans une certaine base:*

$$\rho^+_{C_8}((12)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc $\chi^+_{C_8}((12)) = -1$

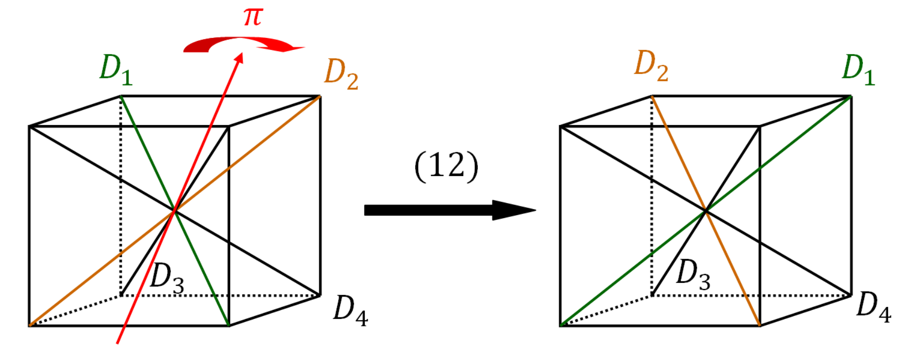

Figure 5: transposition (12) agissant sur C_8 via une rotation d'angle π.

⋆ *Appliquer* (123) *à* C_8 *revient à effectuer une rotation d'angle* $\frac{2\pi}{3}$ *selon l'axe situé sur le grande diagonale* D_4*, donc, dans une certaine base:*

$$\rho^+_{C_8}((123)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

donc $\chi^+_{C_8}((123)) = 0$.

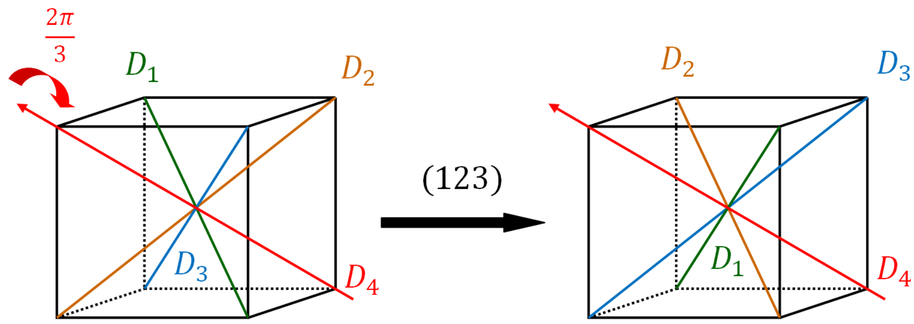

Figure 6: 3-cycle (123) agissant sur C_8 via une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

⋆ *Appliquer* (1234) *à* C_8 *revient à faire une rotation d'un quart de tour (d'angle* $\frac{\pi}{2}$*) selon l'axe orthogonal à l'une des faces (cf. illustration). Donc, dans une certaine base, on a:*

$$\rho^+_{C_8}((1234)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où $\chi^+_{C_8}((1234)) = 1$.

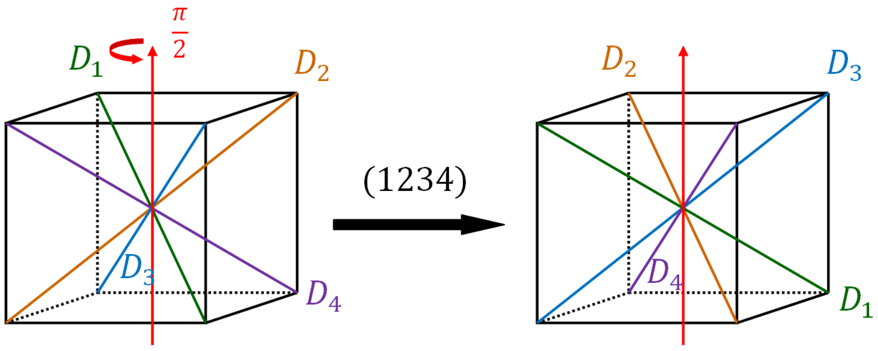

Figure 7: 4-cycle (1234) agissant sur C_8 via une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$\star$ *Appliquer* $(12)(34)$ *à* C_8 *revient à faire une rotation d'un demi-tour (angle de* π*) selon un axe orthogonal à une face (cf. illustration). Ainsi, dans une certaine base, on a:*

$$\rho^+_{C_8}((12)(34)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc $\chi^+_{C_8}((12)(34)) = -1$.

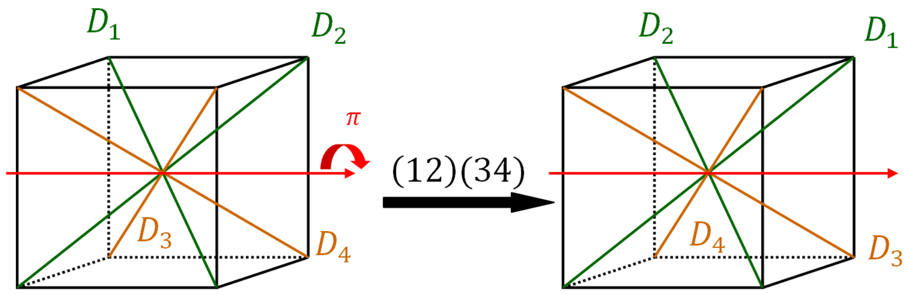

Figure 8: bitransposition (12)(34) agissant sur C_8 via une rotation d'angle π.

- *Il reste à étudier le cinquième représentation, notée* ρ_5. *On peut calculer sa dimension,* $\chi_5(Id)$, *en notant que:*

$$\chi_1(Id)^2 + \chi_\varepsilon(Id)^2 + \chi_{\Delta_4}(Id)^2 + \chi^+_{C_8}(Id)^2 + \chi_5(Id)^2 = |S_4| = 24$$

soit: $20 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + \chi_5(Id)^2 = 24$

donc il vient $\chi_5(Id) = 2$, *la représentation* ρ_5 *est donc de dimension* 2.

En réalité, ρ_5 *est liée à l'action de* S_4 *sur* $C_{(..)(..)}$ *via, pour tous* $\sigma \in S_4$, $(ij)(kl) \in C_{(..)(..)}$*:*

$$\sigma \cdot (ij)(kl) = (\sigma(i)\sigma(j))(\sigma(k)\sigma(l))$$

On considère ainsi un triangle équilatéral, noté Δ_3 *de sommets* $A^{3,4}_{1,2}$, $A^{2,4}_{1,3}$ *et* $A^{2,3}_{1,4}$, *et on impose également que, pour tout* $(ij)(kl) \in C_{(..)(..)}$*:*

$$A^{k,l}_{i,j} = A^{k,l}_{j,i} = A^{l,k}_{i,j} = A^{l,k}_{j,i} = A^{i,j}_{k,l} = A^{j,i}_{k,l} = A^{i,j}_{l,k} = A^{j,i}_{l,k}$$

on aura ainsi toujours trois sommets.

- ⋆ *On a* $\rho_5(Id) = I_2$ *donc* $\chi_5(Id) = 2$.
- ⋆ *Appliquer* (12) *à* Δ_3 *revient à échanger les sommets* $A^{2,4}_{1,3}$ *et* $A^{2,3}_{1,4}$, *ce qui correspond à une réflexion, donc, dans une certaine base:*

$$\rho_5((12)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donc $\chi_5((12)) = 0$.

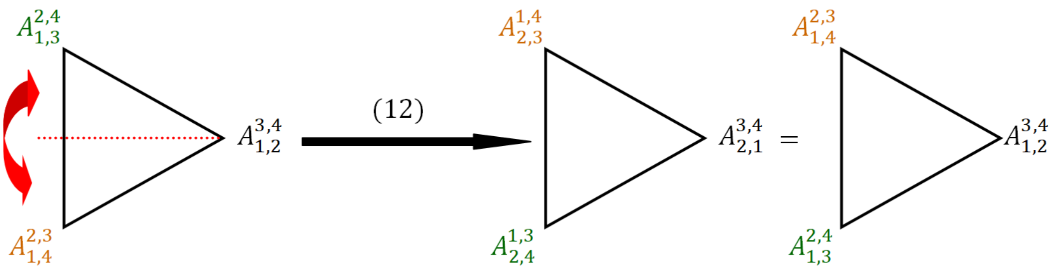

Figure 9: transposition (12) agissant sur Δ_3 via une réflexion.

- ⋆ *Appliquer* (123) *à* Δ_3 *revient à faire une rotation d'angle* $\frac{2\pi}{3}$ *(cf. illustration), donc, dans une certaine base:*

$$\rho_5((123)) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

d'où $\chi_5((123)) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$.

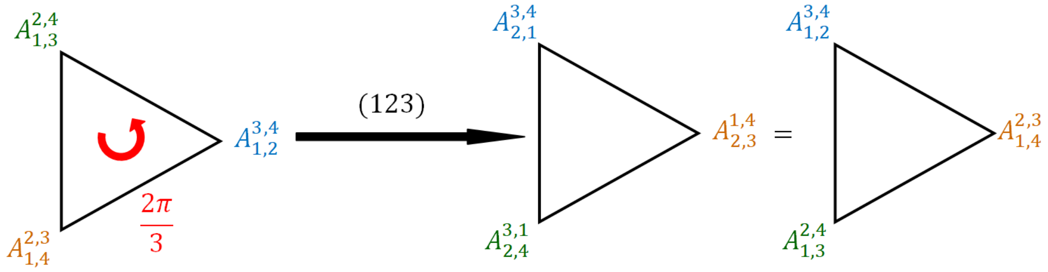

Figure 10: 3-cycle (123) agissant sur Δ_3 via une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- ⋆ *Appliquer* (1234) *à* Δ_3 *revient à permuter les sommets* $A^{3,4}_{1,2}$ *et* $A^{2,3}_{1,4}$, *ce qui est une réflexion, donc, dans une certaine base:*

$$\rho_5((1234)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

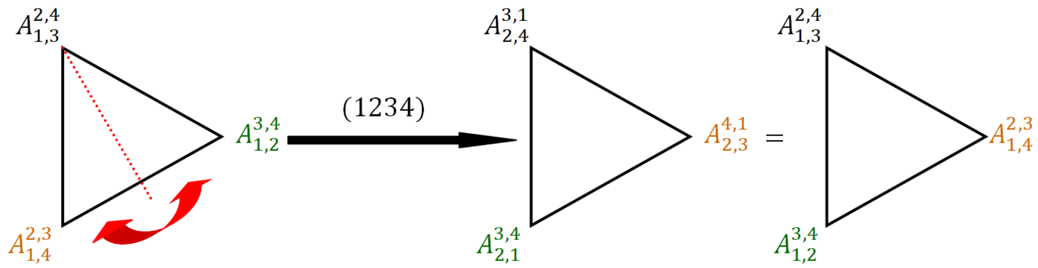

Figure 11: 4-cycle (1234) agissant sur Δ_3 via une réflexion.

donc $\chi_5((1234)) = 0$.
*

⋆ *Enfin, appliquer la bitransposition* $(12)(34)$ *à* Δ_3 *revient à ne pas déplacer les sommets, donc* $\rho_5((12)(34)) = I_2$*, soit* $\chi_5((12)(34)) = 2$.

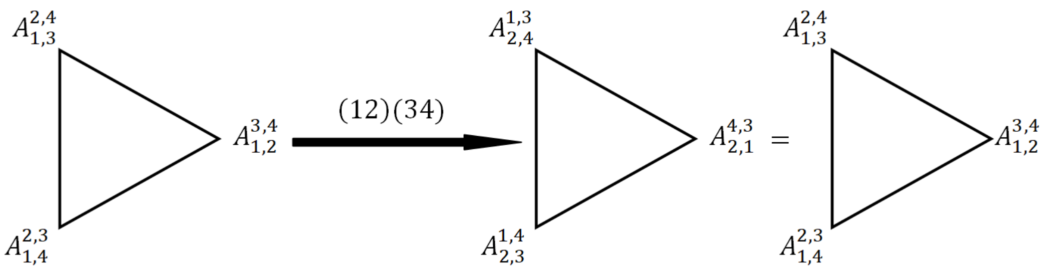

Figure 12: bitransposition (12)(34) agissant sur Δ_3 via l'identité.

Pour vérifier que les représentations sont correctes, on peut vérifier qu'elles sont bien irréductibles, i.e. vérifient, pour leurs caractères irréductibles χ *associés:*

$$\frac{1}{|S_4|}\sum_{\sigma\in S_4}|\chi(\sigma)|^2 = \frac{1}{24}\sum_{\sigma\in S_4}|\chi(\sigma)|^2 = 1$$

De plus, les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace $L^2(S_4)$ *(on les note* $Irr(S_4)$*) i.e., pour tous caractères irréductibles* χ,ψ *de* S_4*, on a:*

$$\frac{1}{24}\sum_{\sigma\in S_4}\chi(\sigma)\overline{\psi(\sigma)} = 0$$

cela se vérifie en regardant l'orthogonalité entre les lignes (attention à tenir compte du cardinal de la classe de conjugaison !!!).

De plus, on peut regarder l'orthogonalité entre les colonnes, i.e, pour tous $\sigma,\tau\in S_4$ *se trouvant dans des classes de conjugaison distinctes, on a:*

$$\sum_{\chi\in Irr(S_4)}\chi(\sigma)\overline{\chi(\tau)} = 0$$

c'est généralement cette dernière stratégie qui est employée afin d'étudier χ_5 *et de compléter la cinquième ligne.*

■

Remarques. 1. *On fait un abus de notation en disant que dans une certaine base, une application linéaire u est égale à une matrice A. En toute rigueur, on devrait écrire: "Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = A$"*

2. *J'ai personnellement tapé ce développement après l'annonce de la suppression des oraux, j'ai ainsi choisi de donner une preuve plus "géométrique" de cette table de caractères, mais trouver la cinquième représentation irréductible peut se faire à l'aide du dernier point, ce qui exploite bien les propriétés des représentations de groupe.*