Théorème de d'Alembert-Gauss

Leçons 204,214

Théorème (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Alors P est surjectif. En particulier, P admet une racine.

Remarque(s). *Ce théorème s'appelle également théorème fondamental de l'algèbre*

Soit l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : P'(z) = 0\}$.

$\#S < +\infty$ puisque $P' \neq 0$ (car P est con constant). Ainsi, $\#P(S) < +\infty$. Soit $\Omega = P(\mathbb{C})\backslash P(S)$ et $\Lambda = \mathbb{C}\backslash P(S)$.

Voici l'objectif de la démonstration:

1. Montrer que Λ est connexe
2. Montrer que Ω est ouvert dans Λ
3. Montrer que Ω est fermé dans Λ
4. Conclure

Démonstration.

1. *Montrons que Λ est connexe. Soient $a, b \in \Lambda$, soit $\mathcal{D}_a = \{$Droites passant par $a\}$*

   $\mathcal{D}_a$ est donc en bijection avec $[0, \pi[$ (angle de direction de la droite). $\mathcal{D}_a$ est donc infini, et il existe $\Delta_a \in \mathcal{D}_a$ telle que Δ_a ne rencontre aucun point de $P(S)$.

   De même, on a $\mathcal{D}_b = \{$Droites passant par $b\} \simeq [0, \pi[$, donc, il existe une droite $\Delta_b \in \mathcal{D}_b$ telle que $\Delta_b \cap P(S) = \emptyset$, et on peut même choisir Δ_b telle que $\Delta_a \cap \Delta_b = \{c\}$ où $c \in \Lambda$ est un point.

   Soit γ le chemin défini par:

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \Lambda \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 2tc + 2\left(\frac{1}{2} - t\right) b & si \quad t \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-t)c + 2\left(t - \frac{1}{2}\right) a & si \quad t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

   γ est un chemin continu dans Λ reliant a à b, donc Λ est connexe par arcs, donc connexe.

2. *Montrons que Ω est ouvert dans Λ. Soient $x \in \Omega$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $x = P(z)$. Donc $P'(z) \neq 0$.*

   Par le théorème d'inversion locale (adapté aux fonctions holomorphes), ils existent des ouverts $U_z \subset \mathbb{C}$ et $V_x \subset P(\mathbb{C})$ un ouvert contenant respectivement z et x tels que $P : U_z \longrightarrow V_z$ soit un biholomorphisme.

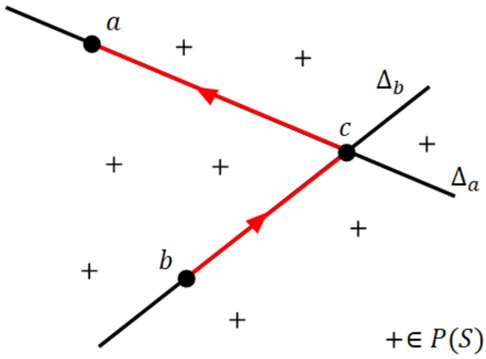

Figure 1: Illustration du choix des droites Δ_a et Δ_b. Le chemin γ liant a à b en passant par c est illustré en rouge

Donc on a:

$$V_x \cap \Lambda = V_x \cap P(S)^c = P(U_z) \cap P\left(S^c\right) = P\left(U_z \cap S^c\right)$$

On obtient ainsi:

$$V_x \cap \Lambda \subset P\left(\mathbb{C} \cap S^c\right) = P(\mathbb{C}) \backslash P(S) = \Omega$$

Donc Ω est ouvert dans Λ

3. *Montrons que Ω est fermé dans Λ. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω qui converge vers $x\Lambda$. Montrons alors que $x \in \Omega$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(z_n)$.*

   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$, alors, puisque $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |P(z_n)| = +\infty$, ce qui est absurde car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   Donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $\left(z_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on note z. On obtient ainsi:

$$\begin{array}{ccc} P\left(z_{\varphi(n)}\right) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & P(z) \\ = & & \\ x_{\varphi(n)} & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & x \end{array}$$

   Donc $x = P(z)$, i.e. $x \in \Omega$, et Ω est fermé dans Λ.

4. *Ω est ouvert et fermé dans Λ connexe, donc $\Omega = \emptyset$ où $\Omega = \Lambda$. Par finitude de $P(S)$, $\Omega \neq \emptyset$ donc $\Omega = \Lambda$.*

D'où $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, ce qui montre la surjectivité de P.

■