Théorème de Plancherel

Leçons 208,250

Théorème (Théorème de Plancherel)

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On choisit cette convention pour la transformée de Fourier de f: Pour tout $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$$

On a alors cette égalité:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L^2}^2 \tag{1}$$

$\mathcal{F}$ s'étend en une application linéaire uniformément continue $L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ et vérifie l'égalité (1).

Voici le plan de la démonstration:

1. Démontrer la formule sommatoire de Poisson pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
2. Montrer la formule de Plancherel pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
3. Prolonger $\mathcal{F}$ à tout $L^2(\mathbb{R})$

Démonstration. *1. Montrons la formule sommatoire de Poisson:*

Lemme (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a alors l'égalité, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$$

Démonstration. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit la fonction:*

$$F : x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$$

F est 2π-périodique. De plus, comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x \mapsto f(x+2\pi n)\|_{L^\infty} < \infty$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x \mapsto f'(x+2\pi n)\|_{L^\infty} < \infty$$

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (convergence uniforme de la série de fonctions et de celle de ses dérivées). Donc, en vertu du théorème de Dirichlet, F converge vers sa série de Fourier (la convergence est uniforme) et on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)e^{inx}$$

avec, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi k)e^{-inx}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Par convergence normale de la fonction F, on peut intervertir série et intégrale, donnant ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+2\pi k)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)e^{-in(x-2k\pi)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n) \end{aligned}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$$

■

2. *Montrons maintenant la formule de Plancherel: Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $y \in \mathbb{R}$, et introduisons la fonction h_y donnée par: $h_y : x \longmapsto f(x)e^{-iyx}$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a alors:*

$$\begin{aligned} \hat{h_y}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i(-y-\xi)x}\mathrm{d}x \\ &= \hat{f}(\xi+y) \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant la formule sommatoire de Poisson, il vient, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)e^{-iyx-2i\pi ny} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+y)e^{inx} \tag{2}$$

On multiplie (2) *par* $\overline{(2)}$ *(expression conjuguée), donnant ainsi:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)e^{-iyx-2i\pi ny}\cdot\sum_{p\in\mathbb{Z}}\overline{f(x+2\pi p)}e^{iyx+2i\pi py} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n+y)e^{inx}\cdot\sum_{p\in\mathbb{Z}}\overline{\hat{f}(p+y)}e^{-ipx}$$

Puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc toutes les séries de fonctions convergent normalement, ce qui justifiera par la suite toute interversion série-intégrale. On a ainsi:

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{Z}^2} f(x+2\pi n)\overline{f(x+2\pi p)}e^{2i\pi y(p-n)} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{(n,p)\in\mathbb{Z}^2}\hat{f}(n+y)\overline{\hat{f}(p+y)}e^{i(n-p)x} \tag{3}$$

On intègre l'égalité 3 *sur le domaine* $\{(x,y)\in[0,2\pi]\times[0,1]\}$*, donnant ainsi:*

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{Z}^2}\int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1} f(x+2\pi n)\overline{f(x+2\pi p)}e^{2i\pi y(p-n)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{(n,p)\in\mathbb{Z}^2}\int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1}\hat{f}(n+y)\overline{\hat{f}(p+y)}e^{i(n-p)x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Par le théorème de Fubini, on peut "séparer" les intégrales en x et y:

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{Z}^2}\underbrace{\int_0^1 e^{2i\pi(p-n)y}\mathrm{d}y}_{=\begin{cases}1 & si\quad n=p\\ 0 & si\quad n\neq p\end{cases}}\cdot\int_0^{2\pi} f(x+2\pi n)\overline{f(x+2\pi p)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{(n,p)\in\mathbb{Z}^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)x}\mathrm{d}x}_{=\begin{cases}2\pi & si\quad n=p\\ 0 & si\quad n\neq p\end{cases}}\cdot\int_0^1\hat{f}(n+y)\overline{\hat{f}(p+y)}\mathrm{d}y$$

On obtient ainsi le résultat final:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi}|f(x+2\pi n)|^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1|\hat{f}(y+n)|^2\mathrm{d}y\\
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}|f(x)|^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1}|\hat{f}(y)|^2\mathrm{d}y\\
\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(y)|^2\mathrm{d}y\\
\|f\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

3. *$\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R})\longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est uniformément continue (c'est même une isométrie à constante près). Ainsi, puisque $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}^{L^2}=L^2(\mathbb{R})$, qui est un espace complet (par le théorème de Riesz-Fischer), on peut prolonger $\mathcal{F}$ à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ tout entier, de manière unique et uniformément continue. Ainsi, par continuité de $\|\cdot\|_{L^2}$ sur $L^2(\mathbb{R})$, la formule de Plancherel (1) reste vraie sur $L^2(\mathbb{R})$, et la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable sera de carré intégrable.*

■

Remarques. 1. *On peut préciser le dernier point dans la démonstration du théorème: Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la topologie associée à la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|f-f_n\|_{L^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc (f_n) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, et puisque l'on a:*

$$\|f_p-f_q\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}_p-\hat{f}_q\|_{L^2}^2$$

La suite $(\hat{f}_n)$ est également de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, complet, donc converge vers une limite que l'on note $\hat{f}$. f ne dépend pas de la suite (f_n) approchant f. En effet, si (g_n) est une autre suite qui approche f, alors $\|f_n-g_n\|_{L^2}\leqslant\|f_n-f\|_{L^2}+\|f-g_n\|_{L^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On a donc $\|\hat{g_n}-\hat{f}\|_{L^2}\leqslant\|\hat{g_n}-\hat{f}_n\|_{L^2}+\|\hat{f}_n-\hat{f}\|_{L^2}=2\pi\|g_n-f_n\|_{L^2}+\|\hat{f}_n-\hat{f}\|_{L^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

2. *Concrètement, pour calculer la transformée de Fourier de $f\in L^2(\mathbb{R})$, on peut donc se donner une suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, comme par exemple $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f\boldsymbol{1}_{[-n,n]})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est intégrable et de carré intégrable (support de mesure finie). On sait que l'on a $\|f-f_n\|_{L^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f-f_n\|_{L^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc on peut trouver une extraction $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ telle que, pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, $\hat{f}_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\hat{f}(x)$. $\widehat{f_{\varphi(n)}}$ est à priori calculable explicitement (elle est L^1), donc on trouve une fonction dépendant de $\varphi(n)$, et il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir $\hat{f}$.*

Reférence. *Article Wikipédia sur la transformée de Fourier (pour le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$)*