Méthode des trapèzes

Leçons 228,230,236

Théorème (Méthode des trapèzes)

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une subdivision $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de $[a,b]$ par: $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$. On a alors:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)+f(x_{k+1}))\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{8n^2}||f''||_{L^\infty([a,b])}$$

$$\text{où } ||g||_{L^\infty(I)} = \sup_{x\in I}|g(x)|$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Démontrer une première inégalité à l'aide d'un polynôme interpolateur de degré 1.
2. Utiliser cette première inégalité afin de démontrer le résultat final

Lemme

Avec les mêmes hypothèses sur f, on a:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{8}||f''||_{L^\infty([a,b])}$$

Démonstration. *Si $a = 0$ et $b = 1$, soit P le polynôme interpolateur de f sur $[0,1]$: $P(X) = (f(1) - f(0))\,X + f(0)$.*

$$\text{On a ainsi } \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)-f(0)}{2} + f(0) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$$

Soit $x \in]0,1[$. Soit $A_x = \frac{f(x)-P(x)}{x(1-x)}$. Considérons alors la fonction:

$$\begin{array}{rccc} \delta: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) - P(t) - A_x t(1-t) \end{array}$$

$\delta \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On a $\delta(0) = \delta(1) = \delta(x) = 0$, avec $0 < x < 1$. Donc, par le théorème de Rolle, ils existent $c_1 < c_2 \in]0,1[$ tels que $\delta'(c_1) = \delta'(c_2) = 0$. De plus, en appliquant encore le théorème de Rolle, il existe $c \in]c_1,c_2[\subset [0,1]$ tel que $\delta''(c) = 0$.

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\delta''(t) = f''(t) + 2A_x$. On a donc $f''(c) + 2A_x = 0$, d'où $A_x = -\frac{1}{2}f''(c)$ soit finalement $|A_x| \leqslant \frac{1}{2}||f''||_{L^\infty([0,1])}$. On obtient ainsi:

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{2}\underbrace{x(1-x)}_{\leqslant\frac{1}{4}}||f''||_{L^\infty([0,1])} \leqslant \frac{1}{8}||f''||_{L^\infty([0,1])}$$

Cette inégalité restant également vraie si $x \in \{0,1\}$, on a alors:

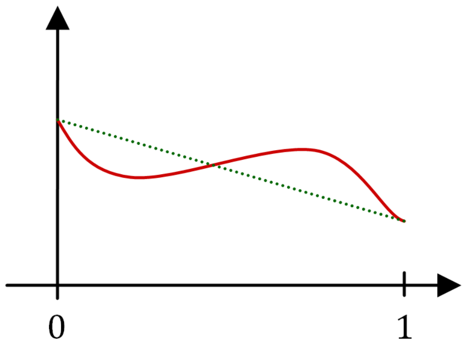

Figure 1: Illustration du polynôme interpolateur de f de degré 1, illustré en trait pointillé vert. La courbe de f est illustrée en trait plein rouge.

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right| = \left|\int_0^1 f(x) - P(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)-P(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\textit{Soit l'inégalité } \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{8}||f''||_{L^\infty([0,1])}$$

Maintenant, si a et b sont quelconques, et $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, posons $g_{a,b}(y) = f((b-a)y+a)$. On a $g_{a,b} \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ (par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$). Ainsi, en faisant le changement de variable $x = (b-a)y+a$, on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f((b-a)y+a)\mathrm{d}y = (b-a)\int_0^1 g_{a,b}(y)\mathrm{d}y$$

$$\textit{Ainsi, il vient: } \left|\int_0^1 g_{a,b}(y)\mathrm{d}y - \frac{g_{a,b}(0)+g_{a,b}(1)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{8}||g''_{a,b}||_{L^\infty([0,1])}$$

Or, pour tout $y \in [0,1]$, $g''_{a,b}(y) = (b-a)^2 f''((b-a)y+a)$, donc on a:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right| &\leqslant \frac{(b-a)^2}{8}||f''||_{L^\infty([a,b])} \\ \textit{D'où: } \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| &\leqslant \frac{(b-a)^3}{8}||f''||_{L^\infty([a,b])} \end{aligned}$$

■

On peut enfin monter le résultat final (i.e. démontrer le théorème à proprement parler)

Démonstration. *En notant que $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, on a, en posant:*

$$S_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)+f(x_{k+1}))$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{x_{k+1}+x_k}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)\right]\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{x_{k+1}+x_k}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)\right| \\
&\underset{\textit{Lemme}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{8}||f''||_{L^\infty([x_k,x_{k+1}])} \\
&\leqslant \frac{||f''||_{L^\infty([a,b])}}{8}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3
\end{aligned}
$$

On obtient finalement:

$$
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{8n^2}||f''||_{L^\infty([a,b])} \qquad (1)
$$

Ce qui prouve le théorème

■

Remarques. *1. Le terme en $\frac{1}{n^2}$ dans la formule* (1) *signifie que l'erreur entre S_n et l'intégrale va "décroitre de manière quadratique" en n. On dit que la méthode des trapèzes est d'ordre* 2.

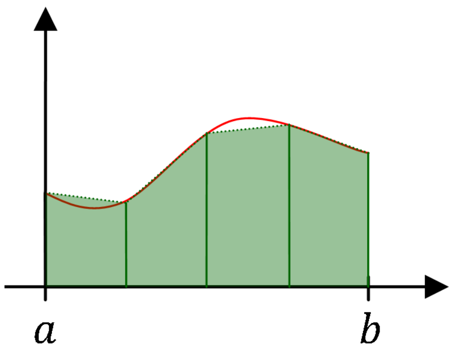

Figure 2: Illustration de l'intégration numérique avec la méthode des trapèzes. La courbe représentant f est en rouge, tandis que la valeur approchée de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ avec $n = 4$ est illustrée en vert.

2. Cette méthode est plus efficace que les méthodes des rectanges (ordre 1*, décroissance en $\frac{1}{n}$), mais est moins efficace que la méthode de Simpson (ordre* 4*, décroissance en $\frac{1}{n^4}$), la plus souvent utilisée pour le calcul numérique d'intégrales. D'autres méthodes moins élémentaires existent.*

3. *On peut utiliser l'intégration numérique pour résoudre numériquement des équations différentielles. En effet, si on veut résoudre:*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

Alors on introduit le schéma numérique suivant:

$$y^{n+1} \approx y^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

Les méthodes d'Euler correspondent à des méthodes des rectangles pour évaluer l'intégrale, la méthode de Runge-Kutta 2 (RK2) correspond à la méthode des trapèzes, et la méthode de Runge-Kutta 4 (RK4) correspond à la méthode de Simpson. Les ordres de convergence des schémas numériques et des méthodes approchant les intégrales sont identiques. Ainsi, une méthode d'Euler est certes facile à programmer, mais sera moins précise.