Déterminant de Vandermonde et corps cyclotomiques

Leçons 102,125,152

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Théorème (Calcul du déterminant de Vandemonde)

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. On a alors:

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$$

Démonstration. *Montrons pour $n \geqslant 2$ la formule du déterminant de Vandermonde par récurrence sur n.*

⋆ *Initialisation: On a, pour $n = 2$:*

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

⋆ *Hérédité: Soit $n \geqslant 2$ fixé. Notre hypothèse de récurrence est:*

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Montrons la formule au rang $n+1$. Soit $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^2$.

$$V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n & x \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \ldots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré n en x. Il existe donc $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que:

$$V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Le polynôme $V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, X)$ a n racines, qui sont $x_1, \ldots, x_n$. En effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_j) = 0$ puisqu'il y a deux colonnes identiques. Donc on a:

$$V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x) \quad = \quad a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

$$\textit{ainsi que: } a_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_n(x_1,\dots,x_n)$$

En effet, en développant le déterminant $V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x)$ par rapport à la dernière colonne, on a: $V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x) = x^nV_n(x_1,\dots,x_n)+\dots$ donc, par identification des coefficients, on a bien ce résultat. Par hypothèse de récurrence, on a donc:

$$V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \quad = \quad \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i) \tag{1}$$

$$V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \quad = \quad \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i) \tag{2}$$

Donc une matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si les x_i sont distincts.

■

Application (Etude d'un corps cyclotomique)

Soit ζ une racine primitive n-ième de l'unité. On a alors:

$$\{x\in\mathbb{Q}(\zeta) : \forall\sigma\in Aut_{corps}\mathbb{Q}(\zeta), \sigma(x)=x\} \quad = \quad \mathbb{Q}$$

Démonstration. *Soit $x\in\mathbb{Q}(\zeta)$ tel que pour tout $\sigma\in Aut_{corps}\mathbb{Q}(\zeta)$, $\sigma(x)=x$. On a:*

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \bigcap_{\substack{\mathbb{Q}\subset\mathbb{K}\subset\mathbb{C} \\ \textit{sous-corps: } \zeta\in\mathbb{K}}}\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\zeta] = \frac{\mathbb{Q}[X]}{\langle\Phi_n\rangle}$$

où Φ_n est le n-ième polynôme cyclotomique. Donc $\deg(\Phi_n) = \phi(n)$ (indicatrice d'Euler) et il existe $R\in\mathbb{Q}[X]$ tel que $x = R(\zeta)$. On fait une division euclidienne de R par Φ_n:

$$R \quad = \quad S\Phi_n+Q$$

avec $\deg(Q)<\deg(\Phi_n)=\phi(n)$. En évaluant en ζ, on obtient:

$$x = S(\zeta)\underbrace{\Phi_n(\zeta)}_{=0}+Q(\zeta) = Q(\zeta) = \sum_{j=1}^{\phi(n)}a_j\zeta^{j-1}$$

où $(a_1, \ldots, a_{\phi(n)}) \in \mathbb{Q}^{\phi(n)}$. *De plus, les automorphismes de corps de* $\mathbb{Q}[\zeta]$ *sont donnés par:*

$$\begin{array}{rccc} \sigma_k : & \mathbb{Q}[\zeta] & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\zeta] \\ & P(\zeta) & \longmapsto & P\left(\zeta^k\right) \end{array}$$

où $k \in \mathbb{N}$. *On a donc:*

$$x = \sigma_k(x) = \sum_{j=1}^{\phi(n)} a_j \zeta^{k(j-1)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. *Ainsi, en posant* $1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_{\phi(n)} < n$, *pour tout* $i \in [\![1, \phi(n)]\!]$*:*

$$x = \sigma_{k_i}(x) = \sum_{j=1}^{\phi(n)} a_j \zeta^{k_i(j-1)}$$

Soit $V = \left[\left(\zeta^{k_i}\right)^{j-1}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant \phi(n)}$. V *est une matrice de Vandermonde. On a ainsi:*

$$V \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\phi(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \sigma_{k_1}(x) \\ \vdots \\ \sigma_{k_{\phi(n)}}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme les ζ^{k_i} *sont tous distincts (*ζ *est une racine primitive de l'unité), la formule du déterminant de Vandermonde assure que* V *est inversible, donc on a:*

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\phi(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc $x = a_1 \in \mathbb{Q}$, *ce qui conclut.*

■

Remarques. *1. Le passage de* (1) *à* (2) *lors du calcul du déterminant de Vandermonde se fait par "ré indexation" des termes:*

j \ i	1	2	⋯	n	$n+1$
1					
2	■				
⋮	■	■			
n	■	■	■		
$n+1$	■	■	■	■	

Figure 1: Illustration de la ré indexation. Les cases marquées d'un carré noir signifient que cet indice est compté dans le produit.

2. *Le résultat final concernant les corps cyclotomiques indique que le groupe des automorphismes de* $\mathbb{Q}(\zeta)$*, égal à* $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{\times}$*,abélien, est aussi celui qui laisse stable* $\mathbb{Q}$ *(on travaille avec* $\mathbb{Q}(\zeta)$ *qui est une extension sur* $\mathbb{Q}$*). On dit que c'est une extension abélienne. En réalité, ce résultat est lié à la théorie de Galois.*