# Fonctions à variation bornée

**Leçons 201,229**

**Définition (Variation d'une fonction)**

Soient $x < y \in \mathbb{R}$, $Sub([x,y])$ l'ensemble des subdivisions $\sigma = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ telles que $x = x_0$ et $y = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}*$. Soit $f : [x,y] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit la **variation de $f$ selon $\sigma$** par:

$$Var_\sigma(f) \ := \ \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

On définit la **variation totale de $f$ sur** $[x,y]$ par:

$$\bigvee_x^y \ := \ \sup_{\sigma \in Sub([x,y])} Var_\sigma(f)$$

On dit que $f$ est **à variation bornée sur** $[x,y]$ si $\bigvee_x^y < +\infty$.

**Théorème (Fonctions à variation bornée)**

Soit $[a,b] \in \mathbb{R}$ un segment avec $a < b$. L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones sur $[a,b]$ correspond à l'espace des fonctions à variations bornées sur $[a,b]$.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer la relation de Chasles: $\forall x < y < z \in \mathbb{R}$, $\bigvee_x^z f = \bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f$ par double inégalité.

2. Montrer que toute fonction est à variation bornée si, et seulement si elle est différence de deux fonctions croissantes par double implication.

3. A l'aide des résultats précédents, montrer le résultat principal.

**Lemme 1 (Relation de Chasles)**

Soient $x < y < z \in \mathbb{R}$ et $f : [x,z] \longrightarrow \mathbb{R}$. On a alors:

$$\bigvee_x^z f \ = \ \bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f$$

**Démonstration.** $\star$ *Soient $\sigma_1 \in Sub([x,y])$ et $\sigma_2 \in Sub([y,z])$. Alors $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ (concaténation) est de la forme $x = x_0 < \cdots < x_p = y = y_0 < \cdots < y_q = z \in Sub([x,z])$. Donc on a:*

$$\begin{aligned}
Var_\sigma(f) &= \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|}_{tous\ les\ x_i} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)|}_{tous\ les\ y_i} \\
&\leqslant Var_{\sigma_1}(f) + Var_{\sigma_2}(f) \\
&\leqslant \bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f
\end{aligned}$$

*En passant au* sup *à gauche, il vient:*

$$\bigvee_x^z f \leqslant \bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f \tag{1}$$

⋆ *De plus, soit $\sigma \in Sub([x,z])$. On introduit $y$ dans $\sigma$, créant ainsi une nouvelle subdivision $\sigma' \in Sub([x,z])$ de cette forme:*

$$\sigma' : x = \underbrace{x_0 < \cdots < x_p}_{:=\sigma_1} = y = \underbrace{y_0 < \cdots < y_q}_{:=\sigma_2} = z$$

*avec* $\sigma : x = x_0 < \cdots < x_{p-1} < y_1 < \cdots < y_q = z$

*Donc on a:*

$$Var_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{p-2} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i=1}^{q-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)|$$

$$Var_\sigma(f) \leqslant \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|}_{=Var_{\sigma_1}(f)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)|}_{=Var_{\sigma_1}(f)} = Var_{\sigma'}(f) \leqslant \bigvee_x^z f$$

$$\textit{Donc on a:} \quad Var_{\sigma_1}(f) + Var_{\sigma_1}(f) \leqslant \bigvee_x^z f$$

*En passant au* sup *à gauche, il vient:*

$$\bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f \leqslant \bigvee_x^z f \tag{2}$$

*Les deux inégalités* (1) *et* (2) *assurent ainsi que:*

$$\bigvee_x^z f = \bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f$$

■

**Lemme 2**

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si, et seulement si $f$ est la différence de deux fonctions croissantes

**Démonstration.** $\star \Longleftarrow$ *Si* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction croissante, alors soit* $\sigma \in Sub([a,b])$ *telle que* $\sigma : a = x_0 < \cdots < x_p = b$. *On a alors:*

$$Var_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{p-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \underset{g\nearrow}{=} \sum_{i=0}^{p-1} [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = g(x_p) - g(x_0) = g(b) - g(a)$$

*De même, si g est décroissante, alors on a:*

$$Var_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{p-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \underset{g\searrow}{=} \sum_{i=0}^{p-1} [g(x_i) - g(x_{i+1})] = g(x_0) - g(x_p) = g(a) - g(b)$$

$$\textit{Ainsi, si } g \textit{ est monotone, alors } \bigvee_a^b g = |g(a) - g(b)| \textit{ donc est à variation bornée}$$

*Si* $h$ *est une autre fonction croissante, et si* $f = g - h$, *alors:*

$$Var_\sigma(f) = Var_\sigma(g - h) = \sum_{i=0}^{p-1} |g(x_{i+1}) - h(x_{i+1}) - g(x_i) + h(x_i)|$$

$$\textit{D'où } \quad Var_\sigma(f) \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \{|g(x_{i+1}) - g(x_i)| + |h(x_{i+1}) - h(x_i)|\} \leqslant Var_\sigma(g) + Var_\sigma(h)$$

$$\textit{D'où } \quad \bigvee_a^b f \leqslant \bigvee_a^b g + \bigvee_a^b h \textit{ ce qui montre la première implication.}$$

$\star \Longrightarrow$ *Réciproquement, si* $f$ *est à variation bornée, alors posons:*

$$\begin{array}{rccc} g : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \bigvee_a^x f \end{array}$$

*g est bien definie (car f est à variation bornée). Soit* $h = g - f$. *Soient* $x \leqslant y \in [a,b]$ :

$$h(y) - h(x) = g(y) - g(x) - f(y) + f(x) = \bigvee_a^y - \bigvee_a^x f + f(x) - f(y)$$

*Par la relation de Chasles, il vient ensuite:*

$$h(y) - h(x) = \bigvee_x^y + f(x) - f(y) \geqslant \bigvee_x^y - \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{=Var_{\{x,y\}}(f)} \geqslant 0$$

*Donc $h$ est constante. Comme $g(y) - g(x) = \bigvee_x^y \geqslant 0$, $g$ est également croissante. Ainsi, $f$ est la différence de deux fonctions croissantes.*

■

On peut montrer le résultat principal:

**Démonstration.** ⋆ *Si $f$ est dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones, alors ils existent $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ et $f_1, \cdots, f_p$ monotones, donc à variation bornée (lemme 2), tels que:*

$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$$

$$\text{Donc, pour tout } \sigma \in Sub([a,b]),\ Var_\sigma(f) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Var_\sigma(f_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \bigvee_a^b f_i$$

$$\text{Donc } \bigvee_a^b f < +\infty \quad \text{ce qui montre une première inclusion.}$$

⋆ *Si $f$ est à variation bornée, le lemme 2 assure que $f = g - h$ où $g, h[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont croissantes donc monotones. Donc $f$ est combinaison linéaire de fonctions monotones, ce qui montre l'autre inclusion, et achève la preuve.*

■

**Reférence.** *X.Gourdon, Analyse.*