Fonction d'Ackerman

Manon Ruffini

Définition 1 (*Fonction d'Ackermann*)

La fonction d'Ackermann est la fonction A de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} A(0,x) = x+1 & \forall x \in \mathbb{N} \\ A(n,0) = A(n-1,0) & \forall m \in \mathbb{N}^* \\ A(n,x) = A(n-1, A(n,x-1)) & \forall n,x \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On notera $A_n(x)$ pour $A(n,x)$, pour tous $n,x \in \mathbb{N}$.
On remarque que : $A_1 : x \mapsto x+2$ et $A_2 : x \mapsto 2x+3$ [1]

Lemme 1 (*admis*)

Pour tous $n,x \in \mathbb{N}$,

1. $A_n(x) > x$, $\forall n,x \in \mathbb{N}$
2. A_n *est strictement croissante, pour* $n \in \mathbb{N}^*$
3. $A_n(x+1) \leqslant A_{n+1}(x)$, $\forall n,x \in \mathbb{N}$
4. $n \mapsto A_n(x)$ *est strictement croissante, pour tout* $x \in \mathbb{N}^*$

(Preuve à la fin)

Théorème 1

La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.

Étape 1

Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{N}$:

$$A_{m_1}(A_{m_2}(x)) \leqslant A_m(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le 3. de lemme 1, $A_n(x+1) \leqslant A_{n+1}(x)$, d'où :

$$A_n(A_n(x+1)) \leqslant A_n(A_{n+1}(x)) = A_{n+1}(x+1)$$

De plus, il existe un entier m' tel que : $A_{m'}(0) \geqslant A_n(A_n(0))$, par le 4.. Soit $m = \max(m', n+1)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{N}, A_n(A_n(x)) \leqslant A_m(x)$$

1.
— $A_1(0) = A_0(1) = 2$. Si $x \leqslant 2$, on a :

$$A_1(x) = A_0(A_1(x-1)) = 1 + A_1(x-1) = \cdots = x + A_1(0) = x+2$$

— $A_2(0) = A_1(1) = 3$. Si $x \leqslant 2$, on a !

$$A_2(x) = A_1(A_2(x-1)) = 2 + A_2(x-1) = \cdots = 2x + A_2(0) = 2x+3$$

On prend $n = \max(m_1, m_2)$. On peut trouver m tel que $A_n(A_n(x)) \leqslant A_m(x)$. Alors :

$$A_{m_1}(A_{m_2}(x)) \leqslant A_n(A_{m_2}(x)) \leqslant A_n(A_n(x)) \leqslant A_n(x)$$

Étape 2

Soient $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{p} A_{m_i}(x) \leqslant A_m(x)$$

On le montre dans le cas $p = 2$. Le cas général s'en déduit par récurrence.
Soient m_1, m_2 des entiers. Soit $n = \max(m_1, m_2)$. Alors :

$$A_{m_1}(x) + A_{m_2}(x) \underset{\text{d'après 4.}}{\leqslant} 2A_n(x) \underset{\text{car } A_2 : x \mapsto 2x+3}{\leqslant} A_2(A_n(x)) \leqslant A_m(x)$$

où m est trouvé comme dans l'étape précédente.

Définition 2

Soit $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est dite m-lente lorsque :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p, f_1(x_1, \ldots, x_p) + \cdots + f_q(x_1, \ldots, x_p) \leqslant A_m(x_1 + \cdots + x_p)$$

où les f_i désignent les composantes de f.

Étape 3

Soit f une fonction récursive primitive. Alors, il existe un entier m tel que : f est m-lente

On le fait par induction.

- Les fonctions de base (fonctions nulle, successeur et projections) sont 1-lentes.
- Soient $f_1, \ldots, f_k, g$ des fonctions primitives récursives. On suppose que, $\forall 1 \leqslant i \leqslant k$, la fonction f_i est m_i lente, de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}^{q_i}$ et g est n-lente de $\mathbb{N}^{q_1 + \cdots + q_k}$ dans $\mathbb{N}^r$. Montrons qu'il existe m tel que la composée $g(f_1, \ldots, f_k)$ est m-lente.
  Soit m' l'entier obtenu dans l'étape 2, pour les entiers $m_1, \ldots, m_k$. Soit m l'entier obtenu dans l'étape 1 en prenant les entiers m' et n. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r} g_i(f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_p)) \\
&\leqslant A_n(\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{q_k} f_i^j(x_1, \ldots, x_p)) \\
&\leqslant A_n(\sum_{j=1}^{k} A_{m_j}(x_1, \ldots, x_p)) \\
&\leqslant A_n(A_{m'}(x_1, \ldots, x_p)) \\
&\leqslant A_m(x_1, \ldots, x_p)
\end{aligned}$$

  Donc $g(f_1, \ldots, f_k)$ est m-lente.
- Enfin, si $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}^r$ est définie par récurrence de base $g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^r$ et de pas $h : \mathbb{N}^{p+r+1} \to \mathbb{N}^r$, où g et h sont des fonctions m_1 et m_2 lentes respectivement, montrons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que f soit m-lente.
  D'après le l'étape 1, il existe un $m_0 \geqslant m_1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{N}, A_{m_2}(A_2(x)) \leqslant A_{m_0}(x)$$

Soit $m = m_0 + 1$. Montrons par récurrence sur k que

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_1(x_1, \ldots, x_p, k) + \cdots + f_r(x_1, \ldots, x_p, k) \leqslant A_m(x_1 + \cdots + x_p + k)$$

$k = 0$ **:** On a : $f(x_1, \ldots, x_p, 0) = g(x_1, \ldots, x_p)$, d'où :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_p, 0) + \cdots + f_r(x_1, \ldots, x_p, 0) &= g_1(x_1, \ldots, x_p) + \cdots + g_r(x_1, \ldots, x_p) \\ &\leqslant A_{m_1}(x_1, + \cdots + x_p) \\ &\leqslant A_m(x_1, + \cdots + x_p + 0) \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ **:** Supposons l'assertion vraie pour $k-1$. Alors :

$$f(x_1, \ldots, x_p, k) = h(x_1, \ldots, x_p, k, f(x_1, \ldots, x_p, k-1))$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} f_i(x_1, \ldots, x_p, k) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(x_1, \ldots, x_p, k, f(x_1, \ldots, x_p, k-1)) \\ &\leqslant A_{m_2}(x_1 + \cdots + x_p + k +) + \sum_{i=1}^{r} f_i(x_1, \ldots, x_p, k-1)) \\ &\leqslant A_{m_2}(x_1 + \cdots + x_p + k +) + A_m(x_1 + \cdots + x_p + k - 1)) \\ &\leqslant A_{m_2}(A_2(A_m)(x_1 + \cdots + x_p + k - 1)) \\ &\leqslant A_{m_0}(A_m(x_1 + \cdots + x_p + k - 1)) \\ &= A_m(x_1 + \cdots + x_p + k) \end{aligned}$$

Étape 4

Conclusion

Par l'absurde, supposons que A est primitive récursive. Alors la fonction $: \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & A(n,n) \end{array} \right.$ est aussi primitive récursive. D'après l'étape 3, il existe un entier m tel que soit m-lente, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{N}, (x) = A_x(x) \leqslant A_m(x)$$

En particulier, c'est vrai pour tout entier $x > m$, ce qui contredit le fait que $n \mapsto A_n(x)$ est strictement croissante.
Finalement, la fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive.

Complément : preuve du lemme 1

1. On fait une récurrence sur n :
   Pour $n = 0$, on a $\forall x, A_0(x) = x + 1 > x$
   Soit $n \in N$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{N}$, $A_n(x) > x$. On fait une récurrence sur x. Pour $x = 0$: $A_{n+1}(0) = A_n(0) > 0$ par HR. Pour $x \leqslant 1$, si $A_n(x-1) > x - 1$, on a :
   $$A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x)) \underset{\text{HR sur } n}{\geqslant} A_{n+1}(x) + 1 \underset{\text{HR sur } x}{>} x + 1$$
2. A_0 est strictement croissante, et pour $n \geqslant 1$, $A_n(x+1) = A_{n-1}(A_n(x)) > A_n(x)$ d'après le point précédent.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons le résultat par récurrence sur x :
   Pour $x = 0$: $A_{n+1}(0) = A_n(0)$
   Pour $x \geqslant 1$, on a : $A_{n+1}(x) = A_n(A_{n+1}(x-1)) \geqslant A_n(A_n(x)) \geqslant A_n(x+1)$
4. $\forall x, \forall n, A_{n+1}(x) \geqslant A_n(x+1) > A_n(x)$

Références

[1] P. Dehornoy, *Mathématiques de l'informatique*. Dunod, 2000.