Théorème de Banach-Steinhauss

Référence(s) :
– X. Gourdon - *Analyse*
Attention aux conventions des livres!!!!!!

Théorème 1 (***Banach-Steinhauss***)

Soit E un espace de Banach; Soit F un espace vectoriel normé. Soit $H \in \mathcal{L}_c(E,F)$, muni de la norme subordonnée $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Alors, on a :

ou bien $(\|f\|)_{f\in H}$ est borné
ou bien Il existe $x \in E$, $\sup\limits_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$

Étape 1

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $\Omega_k = \{x \in E | \sup\limits_{x\in H} f(x) > k$. Pour tout k, Ω_k est ouvert.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in \Omega_k$. Par continuité de f, il existe$\rho > 0$, tel que :

$$\forall x \in E, \|x - x_0\| < \rho \Rightarrow \|f(x\| > k$$

C'est-à-dire, $\mathcal{B}(x_0, \rho) \subset \Omega_k$, et donc Ω_k est un ouvert de E.

Étape 2

On distingue alors deux cas :

Cas 1 : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, Ω_k est dense dans E.
Alors, comme E est un espace métrique complet, d'après le théorème de Baire, on a :

$$\overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k} = E$$

En particulier, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ est non-vide et soit $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$, on a[1] :

$$\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$$

Cas 2 : Il existe un $k \in \mathbb{N}$, Ω_k n'est pas dense dans E.
Alors, il existe $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que $\mathcal{B}(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \emptyset$. Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{B}(x_0, \rho)$, $\sup\limits_{f\in H} \|f(x)\| \leqslant k$.
On en déduit :

$$\forall x \in \mathcal{B}(0, \rho), \forall f \in H, \|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leqslant 2k$$

Par continuité de f, cette inégalité reste vraie pour tout $x \in \overline{\mathbb{B}(0, \rho)}$. D'où, pour tout $f \in H$:

$$\forall x \in E, \|x\| = 1, \|f(x)\| \leqslant \frac{2k}{\rho}$$

Au total, pour tout $f \in H$:

$$\|f\| \leqslant \frac{2k}{\rho}$$

1. En fait, on a même montré que $\{x | \sup\limits_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty\}$ est dense dans E.

Application 1 (*Il existe des fonctions différentes de leur série de Fourier*)

On considère $\mathcal{C}_{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$ continue, 2π périodique$\}$, muni de la norme infinie $\|\|_\infty$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on pose :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, c_p f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, S_n(f) : x \to \sum_{p=-n}^{n} c_p(f)e^{ipx}$$

Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $(S_n(f)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
En particulier, f est différente de sa série de Fourier.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\ell_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & Sn(f)(0) \end{array} \right.$

Étape 3

ℓ_n est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.

D'abord, par linéarité de l'intégrale, on remarque que ℓ_n est une forme linéaire $\mathcal{C}_{2\pi}$. De plus :
Comme $\sum\limits_{p=-n}^{n} e^{ipt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} =: D_n(t)$, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$:

$$\begin{aligned} \ell_n(f) &= \sum_{p=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{p=-n}^{n} e^{ipt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt \end{aligned}$$

Ainsi, si $\|f\|_\infty = 1$, $|\ell_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$; et donc

$$\ell_n \text{ est continue et } \|\ell_n\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$$

Étape 4

Calculons $\|\ell_n\|$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose : $f_\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \frac{D_n(t)}{|D_n(t)+\varepsilon|} \end{array} \right.$.
Pour tout ε, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et par théorème de convergence dominée [2] :

$$|\ell_n(f_\varepsilon)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$$

Ainsi, on a :

$$\|\ell_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$$

Étape 5

Conclusion

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\left|\sin\frac{t}{2}\right| \leqslant \left|\frac{t}{2}\right|$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \|\ell_n\| &\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((2n+1)t/2)}{t/2}\right|dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du && \text{(en posant } u = (2n+1)t/2) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty && \text{parce que } \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du \text{ diverge} \end{aligned}$$

Ainsi, $\|\ell_n\| \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or, l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ est complet [3], donc, en appliquant le théorème de Banach-Steinhauss :

$$\exists f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \sup_{n\in\mathbb{N}}(S_n(f)(0)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\ell_n(f) = \infty$$

Donc $(S_n(f)(0))_n$ diverge et f est différente de sa série de Fourier. [4]

2. On considère $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\cdot\frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon}dt$. Or, $D_n(t)\cdot\frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon} = |D_n(t)|\frac{|D_n(t)|}{|D_n(t)|+\varepsilon} \leqslant |D_n(t)|$ intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et $\to |D_n(t)|$ quand $\varepsilon \to 0$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée.
3. $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet car c'est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
4. On a même : l'ensemble des fonctions différentes de leur série de Fourier est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Compléments

Lemme 1

Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum\limits_{p=-n}^{n} e^{-ipt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$

$$\begin{aligned}
\sum_{p=-n}^{n} e^{-ipt} &= \sum_{p=0}^{n} e^{ipt} + \sum_{p=1}^{n} e^{-ipt} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + e^{-it}\frac{1-e^{-int}}{1-e^{-it}} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + \frac{1-e^{-int}}{e^{-it}-1} \\
&= \frac{e^{i(n+1)t-e^{-int}}}{e^{it}-1} \\
&= \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}}\frac{e^{i(2n+1)t/2}-e^{-i(n+1)t/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

Lemme 2

$\int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right| du$ *diverge*

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin u}{k\pi}\right| du \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ puisque } \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u|\, du = \int_0^\pi \sin u du = -(\cos\pi - \cos 0) = 2
\end{aligned}$$

D'où le résultat.