Toute fonction calculable est récursive

Manon Ruffini

Théorème 1

0 Soit f une fonction $\Sigma^* \to \Gamma^*$, où Σ et Γ sont des alphabets. Si f est calculable par machine de Turing, alors elle est récursive.

Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing qui calcule f. Par équivalence sur les machines de Turing, on peut supposer que $\mathcal{M}$ est déterministe, à ruban bi-infini, à un seul état acceptant, ne se bloque jamais, et est telle que :

- l'alphabet de bande est constitué des entiers $0 \dots n-1$, où 0 représente le symbole blanc [1].
- Les états sont les $q_0 \dots q_{m-1}$, avec comme unique état initial q_0 et unique état final q_+
- La fonction de transition $\delta : [|0, m-1|] \times [|0, n-1|] \times \{\lhd, \rhd\}$ est totale

On a défini les fonctions récursives sur des n-uplets d'entiers [2], donc on voudrait représenter les mots du ruban de $\mathcal{M}$ par des entiers. On peut considérer l'écriture en base m, avec les unités à droite ou à gauche :

$$\forall w = a_0 \dots a_k \in \Gamma^*, \alpha : w \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i m^{k-i} \text{ et } \beta : w \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i m^i$$

Soit w une entrée de $\mathcal{M}$ et soit $C_0 \to \dots \to C_n$ le calcul de $\mathcal{M}$ sur w. On suppose que chaque configuration C_k est égale à (u_k, q_k, v_k), où u_k est le mot sur le ruban strictement à gauche du pointeur, q_k est l'état courant et v_k le mot à droite du pointeur. On va montrer que la fonction $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^3$ définie par :

$$c(\beta(w), k) = (\alpha(u_k), q_k, \beta(v_k))$$

est récursive. Pour ça, on prolonge δ à $\mathbb{N}^2$ par : $\forall (i, j)$ tels que $i \geqslant n$ ou $j \geqslant m$, $\delta(i, j) = (0, 0, 0)$. On note toujours δ ce prolongement. La fonction δ est récursive primitive car elle est à "support fini". On note *mod* et *div* respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne, qui sont des fonctions primitives récursives [3]. On a alors la définition récursive de c suivante :

- $c(\beta(w), 0) = (0, q_0, \beta(w))$
- Soit $a_k = mod(\beta(v_k), m)$ la lettre écrite sur la case désignée par le pointeur. La transition à effectuer est : $(a_{k+1}, q_{k+1}, d_{k+1}) := \delta(a_k, q_k)$. Il y a alors deux possibilités :
  - Si $d_{k+1} = \rhd$: On pose :
$$\alpha(u_{k+1}) = m\alpha(u_k) + a_{k+1}$$
$$\beta(v_{k+1}) = div(\beta(v_k), m)$$
  - Si $d_{k+1} = \lhd$: On pose :
$$\alpha(u_{k+1}) = div(\alpha(u_k), m)$$
$$\beta(v_{k+1}) = m(\beta(v_k) - a_k + a_{k+1}) + mod(u_k, m)$$

On définit là une fonction récursive primitive. On utilise alors le schéma de minimisation pour trouver le plus petit entier n tel que q_n, l'état courant à la n-ème itération, soit l'état final. Le résultat de la fonction f est alors $\beta(u_n v_n)$. Pour trouver ce résultat, on "renverse" u_n à partir de $\alpha(u_n)$ pour

1. C'est important que 0 soit le symbole blanc, à cause des écritures en base m qu'on donne plus loin.
2. En tous cas moi, dans mes plans, c'est ce que j'ai fait.
3. Du coup, c'est bien de les mettre en exemple dans le plan.

obtenir $\beta(u_n)$ (on le fait par récurrence en extrayant un à un les chiffres grâce à mod). Ensuite, on concatène u_n et v_n :

$$\beta(u_n v_n) = \beta(u_k) + m^r \beta(v_k)$$

où r désigne le nombre de lettre de u_k.

Remarque : On a en plus montré que toute fonction récursive peut s'écrire uniquement avec des fonctions récursives **primitives** et **un seul** schéma de minimisation non bornée ! [4]

La réciproque est vraie

(induction)

— On peut concevoir des machines de Turing qui calculent la fonction nulle, la fonction successeur et les projections.
— Si une fonction est définie par composition de deux fonctions récursives f et g, on calcule avec une première machine $f(w)$, puis on recopie le résultat sur le ruban d'une machine calculant g.
— Si une fonction h est définie par récurrence de base f et de pas g, on construit une machine à trois rubans calculant h
— Idem minimisation

Références

[1] Olivier Carton, *Langages formels*. Vuibert, 2014.

4. C'est une question qui m'a été posée le jour de l'oral !