Théorème de Carathéodory

Référence(s) :
– Tauvel - *Géométrie*

Théorème 1 (*Carathéodory*)

Soit X une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{C}(X)$ son enveloppe convexe. Alors, tout point de $\mathcal{C}(X)$ est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de X.

Soit $x \in \mathcal{C}(X)$. Alors, le point x est barycentre à coefficients positifs de points de X :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \geqslant 0, \exists x_1, \ldots, x_p \text{ tels que } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = x$$

Supposons que $p > n+1$. Alors $p - 1 > n = \dim \mathbb{R}^n$. Ainsi, la famille $(x_i - x_1)_{2 \leqslant i \leqslant p}$ est liée. Donc, il existe des réels $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ non tous nuls tels que : $\sum_{i=2}^{p} \alpha_i (x_i - x_1) = 0$. En posant $\alpha_1 = \sum_{i=2}^{p} \alpha_i$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$$

On considère maintenant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) x_i$$

Comme les α_i sont non tous nuls et que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$, il existe un indice $j \in [|1, p|]$ tel que $\alpha_j < 0$. Ainsi, on peut définir la quantité suivante :

$$\tau := \min \left\{ -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \alpha_i < 0 \right\}$$

Puis, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $\mu_i = \lambda_i + \tau \alpha_i$. Alors, par définition de τ :
– Les μ_i sont positifs,
– $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + \tau \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$
– Il existe $j \in [|1, p|], \mu_j = 0$

Ainsi, on a : $\sum_{i \neq j} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \tau\alpha_i) x_i = x$

Ainsi, x est barycentre à coefficients positifs de $p-1$ points de X. On itère jusqu'à $p = n+1$.

Corollaire 1

Si X est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{C}(X)$ est compacte.

Soit $\Lambda := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \right\}$. Soit $f : \begin{array}{|ccc} \Lambda \times X^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array}$. Alors la fonction f est continue, car bilinéaire en dimension finie, et d'après le théorème de Carathéodory :

$$f(\Lambda \times X^{n+1}) = \mathcal{C}(X)$$

Ainsi, comme $\Lambda \times X^{n+1}$ est compacte[1] ,

$$f(\Lambda \times X^{n+1}) = \mathcal{C}(X) \text{ est compacte.}$$

1. Λ est borné (par 1 pour la norme infinie par exemple). Soit $(\lambda^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans Λ qui converge vers $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors $1 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^p \to \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$ donc $\lambda \in \Lambda$ et Λ est fermé. Comme on est en dimension finie, Λ est compact.

Corollaire 2

Si X est borné, alors $\mathcal{C}(X)$ l'est aussi et $d(X) = d(\mathcal{C}(X))$, où $d(A)$ désigne le diamètre de $A \in \mathbb{R}^n$.

Comme l'ensemble X est borné, il existe un réel $r > 0$ tel que $X \subset \mathcal{B}(0, r)$. Or, la boule $\mathcal{B}(0, r)$ est convexe, donc $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{B}(0, r)$.
Ainsi, $\mathcal{C}(X)$ est borné.

Comme $X \subset \mathcal{C}(X)$, il est immédiat que $d(X) \leqslant \mathcal{C}(X)$.
Par ailleurs, soit $x \in \mathcal{C}(X)$. Alors, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \Lambda$ et $(x_1, \ldots_{n+1}$ tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Soit $y \in X$, on a :

$$\|x - y\| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \|y - x_i\| \leqslant \lambda_i d(X) = d(X)$$

[2]

La distance d'un point de X à un point de $\mathcal{C}(X)$ est donc majorée par $\mathcal{C}(X)$.
Soit $z \in \mathcal{C}(X)$. Alors, il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) \in \Lambda$ et $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in X^{n+1}$ tels que $z = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i z_i$ et donc :

$$\|z - x\| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \underbrace{\|z_i - x\|}_{\leqslant d(X)} \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i d(X) = d(X)$$

Par passage à la borne supérieure, on obtient :

$$d(\mathcal{C}(X)) \leqslant d(X)$$

. Finalement :

$$d(\mathcal{C}(X)) = d(X)$$

.

2. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ donc

$$\|y - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (y - x_i) \right\|$$

On conclut par inégalité triangulaire.