Théorème de compacité

Manon Ruffini

Soit Σ un ensemble de formules du calcul propositionnel.

Théorème 1

Alors Σ est satisfiable ssi Σ est finiment satisfiable.

" $\Rightarrow$ " Si Σ est satisfiable, toute valuation qui satisfait Σ satisfait les sous-ensembles finis de Σ.

" $\Leftarrow$ " Supposons que Σ est finiment satisfiable. L'ensemble $\mathcal{P}$ des variables propositionnelles est dénombrable, donc on note : $\mathcal{P} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On cherche une valuation φ_0 telle que pour toute formule $F \in \Sigma, \varphi_0(F) = 1$. C'est-à-dire : on va construire la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que la valuation φ_0 satisfasse Σ, où φ_0 est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_0(x_n) = \varepsilon_n$.

Étape 1

Construisons une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui satisfait la propriété suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(R_n) : \text{"}\forall \mathcal{F} \textit{ partie finie de } \Sigma, \exists \varphi \textit{ valuation qui satisfait } \mathcal{F} \textit{ et telle que } \forall i \in [|1,n|], \varphi(x_i) = \varepsilon_i\text{"}$$

On va construire ε_{n+1} à partir de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et montrer R_{n+1} en même temps.

— Pour $n = 0$, la propriété R_0 est : "Pour toute partie finie $\mathcal{F}$ de Σ, il existe une valuation φ qui satisfait $\mathcal{F}$". Cette propriété est vraie par hypothèse.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sont construits qui satisfont R_n. Alors :

Cas 1 : Pour toute partie finie $\mathcal{F}$ de Σ, il existe une valuation φ qui satisfait $\mathcal{F}$ et telle que $\forall i \in [|1,n|], \varphi(x_i) = \varepsilon_i$ et $\varphi(x_{n+1}) = 0$. On pose $\varepsilon_{n+1} = 0$, et on a ce qu'il faut.

Cas 2 : Sinon, c'est le cas contraire : il existe une partie finie $\mathcal{F}_{n+1}$ de Σ telle que pour toute valuation φ qui satisfait $\mathcal{F}_{n+1}$ et telle que $\forall i \in [|1,n|], \varphi(x_i) = \varepsilon_i$ (ça existe par hypothèse), $\varphi(x_{n+1}) = 1$.

On pose $\varepsilon_{n+1} = 1$. Montrons R_{n+1}. C'est-à-dire, montrons que pour toute partie finie $\mathcal{F}$ de Σ, il existe une valuation φ qui satisfait $\mathcal{F}$ avec : $\forall i \in [|1,n|], \varphi(x_i) = \varepsilon_i$ et $\varphi(x_{n+1}) = 1$.

Soit $\mathcal{F}$ une partie finie de Σ. D'après la propriété R_n (vraie par hypothèse de récurrence), il existe une valuation φ qui satisfait le sous-ensemble fini de Σ $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}_{n+1}$, avec $\forall i \in [|1,n|], \varphi(x_i) = \varepsilon_i$. En particulier, φ satisfait $\mathcal{F}_{n+1}$ donc, par hypothèse, $\varphi(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. Mais on a : φ satisfait $\mathcal{F}$, d'où R_{n+1}.

On a donc construit une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(R_n) : \text{"}\forall \mathcal{F} \text{ partie finie de } \Sigma, \exists \varphi \text{ valuation qui satisfait } \mathcal{F} \text{ et telle que } \forall i \in [|1,n|], \varphi(x_i) = \varepsilon_i\text{"}$$

Étape 2

Soit $\varphi_0 : x_i \mapsto \varepsilon_i$. Alors, la valuation φ_0 satisfait Σ.

Soit F une formule de Σ. Montrons que $\varphi_0(F) = 1$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que toutes les variables de F soient dans $\{x_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Comme l'ensemble $\{F\}$ est fini, d'après R_k, il existe une valuation φ qui satisfait $\{F\}$ et telle que : $\forall i \in [|1,k|], \varphi(x_i) = \varepsilon_i$. Les valuations φ et φ_0 coïncident sur $\{x_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$, qui contient les variables qui apparaissent dans F. Donc

$$\varphi_0(F) = \varphi(F) = 1$$

Application du théorème de compacité

Corollaire 1

Tout ensemble de clauses non satisfiable possède une réfutation par coupure.

Cela vient du fait que tout ensemble FINI de clauses non satisfaisable possède une réfutation par coupure : Si S est un ensemble de clauses non satisfiable, alors il contient un ensemble fini non satisfiable qui possède une réfutation par coupure ; donc S aussi.

Références

[1] R. Cori, D. Lascar, *Logique mathématique, tome 1.* Dunod, 2003.