Formule des compléments

Référence(s) :
– E. Amar et E. Matheron - *Analyse complexe*)

Définition 1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $Re(z) > 0$, on pose :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Théorème 1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(z) < 1$:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Lemme 1

Soit $\alpha \in]0,1[$. Alors $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$

Étape 1

I_α est bien définie ; l'intégrale converge

- D'abord, I_α est bien définie, parce que la fonction $u_\alpha : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t^\alpha(a+t)}$ est mesurable positive
- $I_\alpha < \infty$ parce que :

  La fonction u_α est continue donc localement intégrable

  De plus : $u_\alpha(t) \sim_0 \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable en 0 car $\alpha < 1$

  Et $u_\alpha(t) \sim_\infty \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable en $+\infty$ car $\alpha + 1 > 1$.

Étape 2

Application du théorème des résidus

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$; Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array} \right.$ (si $z = re^{i\theta}, \theta \in]0, 2\pi[, z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$).

La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$ et admet un pôle simple en -1, avec $Res(f, -1) = \lim\limits_{z \to -1} f(z)(1+z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$.

Pour $R > 1$, on définit un chemin γ_R comme suit : $\gamma_R = C_R \cup I_R^+ \cup \Gamma_R \cup I_R^-$, avec :

Dessin

- $C_R = \left\{ \frac{e^{i\theta}}{R}, \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}$
- $I_R^+ = \left[\frac{i}{R}; \frac{i}{R} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}}\right]$
- $I_R^- = \left[-\frac{i}{R}; -\frac{i}{R} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}}\right]$
- $\Gamma_R = \left\{ Re^{i\theta}, \theta \in [\theta_R; 2\pi - \theta_R] \right\}$, avec $\theta_R = \arctan\left(\frac{1}{R\sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}}}\right)$

On note K_R le compact délimité par le chemin γ_R, et on remarque que comme $\{-1\} \in \overset{\circ}{K}_R$, on peut appliquer le théorème des résidus et on obtient :

$$\forall R > 1, \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\pi Res(f, -1) = 2i\pi e^{-i\alpha}$$

Étape 3

Passons à la limite $R \to +\infty$.

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \underbrace{\int_{\Gamma_R} f(z)dz}_{A} - \underbrace{\int_{I_R^-} f(z)dz}_{D} - \underbrace{\int_{C_R} f(z)dz}_{B} + \underbrace{\int_{I_R^+} f(z)dz}_{C}$$

–

$$\begin{aligned}|A| &= \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\frac{ie^{i\theta}}{R}}{\left(\frac{1}{R}\right)^\alpha \left(1+\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)e^{i\theta\alpha}}d\theta\right| \leqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^\alpha}\left|1+\frac{1}{R}e^{i\theta}\right|}d\theta \\ &\leqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{R^{\alpha-1}}\frac{1}{1-\frac{1}{R}}d\theta = \pi\frac{1}{R^{\alpha-1}}\frac{1}{1-\frac{1}{R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (car } \alpha > 0)\end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned}|B| &= \left|\int_0^{2\pi} \mathbf{1}_{[\theta_R;2\pi-\theta_R]}(\theta)\frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(1+Re^{i\theta})}d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{R}{R^\alpha|1+Re^{i\theta}|}d\theta \\ &\leqslant R^{1-\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-R}d\theta \leqslant \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{1-R} \\ &\sim_{+\infty} \frac{1}{R^\alpha} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (car } \alpha > 0)\end{aligned}$$

–

$$C = \int_{\frac{i}{R}}^{\frac{i}{R}+\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} f(z)dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} f\left(t+\frac{i}{R}\right)dt = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{i}{R}\right)^\alpha\left(1+t+\frac{i}{R}\right)}dt$$

Or, pour $t > 0$, $\left(t+\frac{i}{R}\right)^\alpha = \sqrt{\frac{1}{R^2}+t^2}^{\,i\alpha} \exp\left(i\alpha \arctan\frac{1}{Rt}\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^\alpha$, d'où

- $\mathbb{1}_{]0;\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}]}(t)f\left(t+\frac{i}{R}\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$
- $\left|\mathbb{1}_{]0;\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}]}(t)f\left(t+\frac{i}{R}\right)\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$ intégrable (car I_α l'est.

Ainsi, par théorème de convergence dominée,

$$C \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha(1+t)}dt = I_\alpha$$

– On a :$\left(t-\frac{i}{R}\right)^\alpha = \sqrt{t^2+\frac{1}{R^2}}^{\,\alpha} \exp\left(i\left(\arctan\left(\frac{-1}{Rt}\right)+2\pi\right)\alpha\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$. Donc, comme précédemment, on obtient :

$$D \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} I_\alpha e^{-2i\pi\alpha}$$

Ainsi, par passage à la limite, on obtient :

$$2i\pi e^{-i\pi\alpha} = \left(1-e^{-2i\pi\alpha}\right)I_\alpha$$

Donc

$$I_\alpha = 2i\pi\frac{e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Étape 4

Preuve du théorème

Par théorème des zéros isolés, pour prouver le théorème, il suffit de prouver l'égalité pour tout $z = \alpha \in]0,1[$. Soit $\alpha \in]0,1[$, on a :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt\int_0^{+\infty}s^{-\alpha}e^{-s}ds \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{+infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha\frac{e^{-(s+t)}}{t}dtds$$

On fait le changement de variable $u = \frac{s}{t}$ et $v = s+t$; c'est-à-dire : $s = \frac{uv}{1+u}$ et $t = \frac{v}{1+u}$. On pose donc :

$$\varphi : \left|\begin{array}{ccc} (R_+^*)^2 & \longrightarrow & (R_+^*)^2 \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u}\right)\end{array}\right.$$

φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de jacobien

$$|J_\varphi(u,v)| = \begin{matrix} \frac{v}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \\ \frac{-v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \end{matrix} = \left| \frac{u}{(1+u)^3} + \frac{uv}{(1+u)^3} \right| = \frac{v(1+u)}{(1+u)^3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-v}\frac{1}{u^\alpha}\frac{1}{\frac{v}{1+u}}\frac{v}{(1+u)^2}dudv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v}dv \int_0^{+\infty}\frac{1}{u^\alpha(1+u)}du \\ &= [e^{-t}]_0^{+\infty} I_\alpha = I_\alpha \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(z) < 1$:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$