# Nombre d'endomorphismes diagonalisables sur un corps fini

Référence(s) :
– X. Gourdon - *Algèbre*
– S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas - *Oraux X-ENS, algèbre 1*

Soit $n \in N^*$ ; soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini. On pose :

$$D(n,q) = \{u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) : u \text{ diagonalisable } \}$$

**Théorème 1**

$$|D(n,q)| = \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_{q-1}) \\ \sum n_i = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \dots |GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$$

**Étape 1**

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$. Alors, la matrice $A$ est diagonalisable si et seulement si $A^q - A = 0$.*

$\Rightarrow$ : On écrit $A = PDP^{-1}$ où $P$ inversible et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les $\lambda_i \in \mathbb{F}_q$. Ainsi, pour tout $i \in [|1,n|]$, $\lambda_i^q = \lambda_i$ et $D^q = D$ donc $A^q = A$.

$\Leftarrow$ : Comme la matrice $A$ est annulé par le polynôme $X^q - X$ qui est scindé à racines simples, elle est diagonalisable.
En effet, si on note $\zeta_1, \dots, \zeta_{q-1}$ les éléments de $\mathbb{F}_q^*$, on a, pour tout $1 \leqslant i \leqslant q-1$, $\zeta_i^q = \zeta_i$, et $0^q = 0$. Ainsi, on a $q$ racines distinctes de $X^q - X$ qui est de degré $q$ donc :

$$X^q - X = X \prod_{i=1}^{q-1} (X - \zeta_i)$$

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

**Étape 2**

*On se ramène à des $(q-1)$-uplets de sous-espaces de $E = \mathbb{F}_q^n$.*

D'après le lemme précédent, $A$ est diagonalisable ssi $X^{q-1} - X$ annule $A$. Or, $X^{q-1} - X = \prod_{i=1}^{q-1} (X - \zeta_i)$ ; et les $(X - \zeta_i)$ sont premiers entre eux ; donc si on pose pour $1 \leqslant i \leqslant q-1, E_i := \ker A - \zeta_i \mathrm{Id}$, on a (lemme des noyaux) :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$$

Pour tout $i \in [|1, q-1|]$, on pose $n_i := \dim E_i$, et on a : $n_1 + \dots + n_{q-1} = n$.
Réciproquement, étant donnée $E_1, \dots, E_{q-1}$, l'endomorphisme $A$ tel que $A : x \in E_i \mapsto \zeta_i x$ est complètement déterminé et appartient à $D(n,q)$.
Ainsi, on a une bijection :

$$f : D(n,q) \to \left\{ (E_i)_{1 \leqslant i \leqslant q-1} : \bigoplus_{i=1}^{q-1} = E \right\}$$

Ainsi

$$|D(n,q)| \to \left\{ (E_i)_{1 \leqslant i \leqslant q-1} : \bigoplus_{i=1}^{q-1} = E \right\}$$

**Étape 3**

*On partitionne* $\left\{(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q-1} : \bigoplus_{i=1}^{q-1} E_i = E\right\}$

Pour tout $N = (n_1, \dots, n_{q-1}) \in \mathbb{N}^{q-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{q-1} = n$, on pose $Z_N = \left\{(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q-1} : \bigoplus_{i=1}^{q-1} = E \text{ et } \forall i, \dim E_i = n_i\right\}$.

Les $Z_N$ forment une partition de $\left\{(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q-1} : \bigoplus_{i=1_i}^{q-1} = E\right\}$, et donc :

$$|D(n,q)| = \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_{q-1}) \\ \sum n_i = n}} |Z_N|$$

**Étape 4**

*Dénombrement par action de groupe*

On considère l'action de groupe suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \times Z_N & \to & Z_N \\ (q, (E_i)_{1\leqslant i\leqslant q-1}) & \mapsto & (g(E_i))_{1\leqslant i\leqslant q-1} \end{array}$$

Cette action est bien défini car pour $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ conserve les dimensions.

- Cette action est transitive. En effet, si on prend $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q-1}$ et $(E'_i)_{1\leqslant i\leqslant q-1}$ dans $Z_N$, et des bases $(e_1, \dots, e_{q-1})$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ adaptées à ces décompositions de $E$ ; on pose $g : e_i \mapsto e'_i$ et on a :

$$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \text{ et } \forall i \in [|1, q-1|], g(E_i) = E'_i \text{ par égalité des dimensions}$$

- Ainsi, l'action définie plus haut n'a qu'une orbite ; et si on prend $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q-1} \in Z_N$ :

$$|\mathcal{O}((E_i))| = |Z_N| = \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Stab}((E_i))|}$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{q-1} E_i$. Soit $u \in \mathrm{Stab}((E_i))$. Alors, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $u$ est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{q-1} \end{pmatrix}, \text{ où les } M_i \in \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)$$

Ainsi :

$$\mathrm{Stab}((E_i)) = |\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \dots |\mathrm{GL}_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|$$

Et donc finalement :

$$|D(n,q)| = \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_{q-1}) \\ \sum n_i = n}} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \dots |\mathrm{GL}_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$$

# Complément : Dénombrer les endomorphismes diagonalisables de Mn(Fq)

Dans ce cas, on décompose $A$ en son noyau et sa partie injective :

$$\#\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q), A \text{ diagonalisable}\} = \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_q \\ \sum n_i = n}} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \dots |\mathrm{GL}_{n_q}(\mathbb{F}_q)|}$$