Dual de Mn(K)

Référence(s) :

– S. Francinou, H. Gianelle et S. Nicolas - *Oraux X-ENS algèbre 1*

Théorème 1

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A : X \mapsto \mathrm{Tr}(AX) \end{array} \right.$ *. Alors, l'application f est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.*

On note E_{ij} la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on rappelle que pour tous $i, j, k, l, E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
Les applications f_A sont bien dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'application f est linéaire par linéarité du produit et de la trace.
On remarque que $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* = n^2$ donc pour montrer que f est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f_A = 0$.
Pour tout $(i, j) \in [|1, n|]^2$, on a $\mathrm{Tr}(AE_{ij)} = 0$, or

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AE_{ij}) &= \sum_{k=1}^{n} (AE_{ij})_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (A)_{kl}(E_{ij})_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = a_{ji} \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où l'injectivité et donc la bijectivité de f.

Corollaire 1

Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, g(XY) = g(YX)$$

Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $g(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$

Comme f est un isomorphisme, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $g = f_A$, i.e.

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AX) \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(AXY) = \mathrm{Tr}(AYX) = \mathrm{Tr}(XAY)$ et donc $\mathrm{Tr}((AX - XA)Y) = 0$ et d'après l'isomorphisme précédent :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX - XA = 0$$

C'est-à-dire que A est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc A est une homothétie [1], d'où le résultat.

Corollaire 2

Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que $\ker \varphi = H$. D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.
On veut montrer qu'il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap H$; i.e. il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(AM) = 0$.
Soit r le rang de A. Il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$, où $J_r = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, 0, \ldots, 0)$.

Pour tout X, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(PJ_rQ) = \mathrm{Tr}(J_rQXP)$, où $QXP \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Donc si on montre qu'il existe $Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$, on aura le résultat en prenant $X = Q^{-1}YP^{-1}$.

Prenons $Y = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $\det Y = (-1)^{n+1}$ et J_rY est de diagonale nulle donc Y convient.

1. Vérifier la preuve de ça

Corollaire 3

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX + XA = B$
2. $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (AC + CA = 0) \Leftarrow (\mathrm{Tr}(BC) = 0)$

On considère l'application linéaire $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX + XA \end{array} \right.$. Alors on a les équivalences suivantes :

- $(1) \Leftrightarrow B \in \mathrm{Im}(h)$
- $(2) \Leftrightarrow \forall C \in \ker h, f_C(B) = 0 \Leftrightarrow B \in (f(\ker h))^{\circ}$ [2]

Pour montrer le résultat, il faut montrer $\mathrm{Im}(h) = f(\ker h)^{\circ}$.

- On a : $\dim f(\ker h)^{\circ} = n^2 - \dim f(\ker h) = n^2 - \dim \ker h = \dim \mathrm{Im}(h)$
- Soit $d \in \mathrm{Im} h$. Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), D = AY + YA$. Soit $C \in \ker h$, alors :

$$f_C(D) = f_C(AY+YA) = \mathrm{Tr}(C(AY+YA)) = \mathrm{Tr}(CAY)+\mathrm{Tr}(CYA) = \mathrm{Tr}(CAY)+\mathrm{Tr}(ACY) = \mathrm{Tr}((CA+AC)Y) = 0$$

Donc $D \in f(\ker h)^{\circ}$ et donc $\mathrm{Im} h \subset f(\ker h)^{\circ}$.

Ainsi, on a $\mathrm{Im} h = f(\ker h)^{\circ}$ et donc l'équivalence.

2. orthogonal dual :
- Si $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $F^{\circ} = \{f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* | \forall x \in F, f(x) = 0\}$
- Si $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, $F^{\circ} = \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \forall f \in F, f(x) = 0\}$