Décomposition de Dunford

Gourdon algèbre

Théorème 1

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur k. Alors :

$$\exists!(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2, \begin{cases} u = d+n \\ d \circ n = n \circ d \\ d \text{ est diagonalisable} \\ n \text{ est nilpotent} \end{cases}$$

Lemme 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $F \in k[X]$ tel que $F(u) = 0$. Soit $F = \beta \prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles. Pour $i \in [|1,s|]$, soit $N_i = \ker(M_n^{\alpha_i}(u))$. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i \text{ et } \forall i \in [|1,s|], \text{ le projecteur sur } N_i \text{ parallèlement à } \bigoplus_{j \neq i} N_j \text{ est un polynôme en } u.$$

Démonstration :
- $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ découle directement du lemme des noyaux
- Expression des p_i

  Pour $i \in [|1,s|]$, soit $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$.

  Les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble donc : (Bézout)

$$\exists U_1, \ldots, U_s \in k[X], \sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$$

  Soient $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u)$, pour $i = 1 \ldots s$.

  Les p_i sont des polynômes en u et $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$.
- Les p_i sont des projecteurs

  Si $i \neq j$, alors $F | Q_i Q_j$, donc $p_i \circ p_j = Q_i Q_j(u) \circ U_i U_j(u) = 0$. Donc,

$$\forall i \in [|1,s|], p_i = \sum_{i=1}^{s} p_i \circ p_j = p_i^2$$

- Soit $i \in [|1,s|]$, $\mathrm{Im} p_i = N_i$

  Soit $y = p_i(x) \in \mathrm{Im} p_i$. Alors : $M_i^{\alpha_i}(y) = M_i^{\alpha_i} P_i(u)(x) = 0$ car $F | M_i^{\alpha_i} P_i$. Donc $y \in \ker M_i^{\alpha_i} = N_i$.

  Soit $x \in N_i$. On a : $x = \sum_{=1}^{s} p_j(x) = p_i(x)$ car $\forall j \neq i, M_i^{\alpha_i} | P_j$. Donc $x \in \mathrm{Im} p_i$
- Soit $i \in [|1,s|]$, $\ker p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

  Soit $x \in \ker p_i$. Alors : $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) \subset \bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Im} p_j = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

  Soit $x \in N_j, j \neq i$. Alors $\exists t \in E, x = p_j(t)$, donc $p_i(x) = p_i \circ p_j(t) = 0$. Ainsi, $x \in \ker p_i$. Il s'ensuit : $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \ker p_i$ ■

Démonstration du théorème : **Existence** On écrit : $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. On peut appliquer le lemme précédent à χ_u d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On reprend les mêmes notations :
Posons $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$. L'endomorphisme d est un polynôme en u car les p_i sont dans $k[u]$. De plus, d est diagonalisable, car les p_i le sont (projecteurs) et ils commutent deux à deux.
Soit $n = u - d$. Alors $n \in k[u]$ et donc d et n commutent.
De plus : Soit $q = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \alpha_i$. On a : $n = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i \mathrm{Id}) p_i$, puis : $n^q = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i \mathrm{Id})^q p_i$. Or $\forall i = 1 \ldots s$, $(u - \lambda_i \mathrm{Id})^q p_i = (u - \lambda_i \mathrm{Id})^q P_i(u)$, et $\chi_u | (X - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i} P_i$. Donc, $n^q = 0$. D'où, n est nilpotent.

Unicité Soient $d', n' \in \mathcal{L}(E)$, qui conviennent. Alors : u commute avec d' et n', et comme d est un polynôme en u, d commute avec d'. Comme d et d' sont diagonalisables, ils le sont dans une même base et donc $d - d'$ est diagonalisable.

Par ailleurs, $d - d' = n' - n$ est nilpotent. Donc, $d - d' = 0$, puis $n' - n = 0$. ∎