Réduction des endomorphismes normaux

Référence(s) :
– X. Gourdon - *Analyse*

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \text{ les } \lambda_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

Étape 1

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors l'espace $F^\perp$ est stable par u^*.

Soit $x \in F$. Par hypothèse, $u(x) \in F$. Donc, pour tout $y \in F^\perp$, $\langle y, u(x) \rangle = 0$. Ainsi,

$$\forall y \in F^\perp, \forall x \in F, \langle u^*(y), x \rangle = 0$$

C'est-à-dire, pour tout $y \in F^\perp, u^*(y) \in F^\perp$.
Donc $F^\perp$ est stable par u^*.

Étape 2

Soit E_λ un sous-espace propre de u. Alors, les sous-espaces E_λ et E_λ^* sont stables par u et u^*.

L'espace E_λ est stable par u donc, d'après ce qui précède, $E_\lambda^\perp$ est stable par u^*.
Soit $x \in E_\lambda$. On a :

$$u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$$

Donc, E_λ est stable par u^*. Toujours d'après l'étape 1, $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Étape 3

Si $\dim E = 2$, et si u n'admet pas de valeur propre réelle, alors pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ avec } b \neq 0$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de u. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base. Comme u est un endomorphisme normal, on a : ${}^tMM = M{}^tM$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + dc \\ ab + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$b = \pm c$$

- Si $b = c$, la matrice M est symétrique donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$, ce qui est impossible par hypothèse.[1]
- On a donc $b = -c$, avec $b \neq 0$, et donc $ab + dc = ac + bd$ devient $2(a-d)b = 0$ d'où $a = d$.

Étape 4

Preuve du théorème par récurrence forte sur $n = \dim E$.

- Si $n = 1$, le résultat est immédiat.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai pour tout $m < n$.

  Cas 1 : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$:

  Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_n)$, où $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$. Alors, $F = E_\lambda^\perp$ est stable par u et u^*. Les endomorphismes $u|_F$ et $u|_F^*$ commutent[2]. De plus, $\dim F \leqslant n-1$ donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de F dans laquelle $M_{\mathcal{B}_1}(u|_F)$ est de la forme souhaitée.
  Soit $\mathcal{B}_2$ une base orthonormée de E_λ. Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et convient.

  Cas 2 : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$

  Soit $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible de $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$ $(\alpha^2 - \beta < 0)$.
  Soit $N = \ker Q(u)$; montrons que $N \neq \emptyset$: On a $Q = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme λ est racine de Q, λ est racine de χ_u donc $\det(u - \lambda Id) = 0$. Ainsi, $\det Q(u) = \det(u - \lambda Id)\det(u + \lambda Id) = 0$, donc l'espace N n'est pas vide.
  Comme l'endomorphisme $Q(u)$ commute avec u et u^*, l'espace N est stable par u et u^*. Soit $v = u|_N$. Alors $v^* = u^*|_N$; et $vv^* = v^*v$ est un endomorphisme symétrique réel ; et donc admet une valeur propre réelle μ.
  Soit $x \in N \setminus \{0\}$. On pose $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Comme $u^2(x) = 2\alpha u(x) - x$, on a $\dim F = 2$ et $F = \mathrm{Vect}(u(x), u^2(x))$ (car Q est irréductible). Ainsi, l'espace F est stable par u et $u^*(u^2(x)) = u(u^*(u(x))) = u(\mu x) = \mu u(x)$ (et $u^*(u(x)) = u(u^*(x))$. Ainsi, F est stable par u^*.
  Les endomorphismes $u|_F$ et $u^*|_F$ commutent donc $u|_F$ est normal. Soit $\mathcal{B}_2$ une base orthonormale de F. D'après l'étape 3

$$M_{\mathcal{B}_2}(u|_F) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

  L'espace F est stable par u^* donc $F^\perp$ est stable par $u^{**} = u$. De plus, F est stable par u donc $F^\perp$ est stable par u^*. Ainsi, l'endomorphisme $u|_{F^\perp}$ est normal et $\dim F^\perp = n - 2 < n$. On applique l'hypothèse de récurrence, puis on a le résultat par concaténation des bases.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors S admet une valeur propre réelle :
On sait que S admet une valeur propre complexe λ. Soit x un vecteur propre associé. Alors $Sx = \lambda x$ d'où

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \lambda\, {}^t x \bar{x} = {}^t x (S \bar{x}) = \bar{\lambda}\, {}^t x \bar{x} = a\bar{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$$

Ainsi, $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

2. $(u|F)^*$ est bien défini et est égal à $(u^*)|_F$ par unicité de l'adjoint