Théorème des extremums liés

Référence(s) :
– X. Gourdon - *Analyse*

Théorème 1

Soient $f, g_1, \ldots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On pose $\Gamma = \{x \in U | \forall i \in [|1, r|], g_i(x) = 0\}$. On suppose que :
- *La fonction $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$*
- *Les formes linéaires $Dg_1(a), \ldots, Dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes.*

Alors, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in R$ tels que

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Dg_i(a)$$

Les (λ_i) sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Étape 1

Quelques remarques

Les $(Dg_i(a))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forment une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$ qui est de dimension n ; donc nécessairement

$$r \leqslant n$$

Si $r = n$, les $(Dg_i(a))_i$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ et le résultat est immédiat.

On peut donc supposer que $r < n$. On pose $s = n - r \geqslant 1$ et on identifie $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^s \times R^r & \to & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r) \end{array}$.

On écrit $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$

Étape 2

Soit $g = (g_1, \ldots, g_r)$. Montrons qu'on peut supposer que $D_y g(a)$ est inversible.

Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_r}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_s}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial x_r}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial y_s}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$$

Comme les $Dg_i(a)$ forment une famille libre, rg $A = r$ [1]. On peut donc extraire une sous-matrice inversible de A de taille $r \times r$; et quitte à renommer les variables, on peut supposer que

$$\det \left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{A \leqslant i,j \leqslant r} \right) \neq 0$$

C'est-à-dire :

$$D_y g(a) \text{ est inversible.}$$

Étape 3

On applique le théorème des fonctions implicites à g au voisinage de a.

Il existe
- un voisinage ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$
- un voisinage ouvert Ω de a dans $\mathbb{R}^n$

1. Sinon, les lignes de A seraient liées et on aurait une contradiction

– une fonction $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) : U' \to \mathbb{R}^s$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que
$$(x \in U', (x,y) \in \Omega, g(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in U', y = \varphi(x))$$

Les éléments de $\Gamma \cap \Omega$ s'écrivent donc $(x, \varphi(x))$.

Étape 4

Conclusion

On considère la fonction $h : \begin{array}{|lcc} U' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, \varphi(x) \end{array}$. On a $h = f \circ \psi$ où $\psi = (Id_{\mathbb{R}^s}, \varphi)$.
De plus $h(\alpha) = f(a)$; et comme pour tout $x \in U'$, $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ et f admet un extremum local en a sur Γ, la fonction h admet un extremum local en α (i.e $Dh(\alpha) = 0$). Ainsi :

$$\forall i \in [|1,s|], \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial d\psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha)$$

Or $\psi(\alpha) = a$; pour $j \in [|1,s|]$, $\frac{\partial d\psi_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$ et pour $j \in [|1,r|]$, $\frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$, donc :

$$\forall i \in [|1,s|], 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)$$

Par ailleurs, $g \circ \psi = 0$, donc en particulier, pour tout $k \in [|1,r|]$, $g_k \circ \psi = 0$, et comme précédemment, on obtient, pour tout k :

$$\forall i \in [|1,s|], 0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)$$

Considérons maintenant la matrice

$$M = \left(\begin{array}{cccccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \hline & & & & & \\ & & A & & & \\ & & & & & \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{r+1,n}(\mathbb{R})$$

D'après ce qui précède, les s premières colonnes de M sont combinaisons linéaires des r dernières ; donc M est de rang r. Ainsi, les $r+1$ lignes de M sont liées :

$$\exists \mu_0, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}, 0 = \mu_0 Df(a) + \sum_{i=1}^{r} Dg_i(a)$$

Or la famille $(Dg_i(a))_i$ est libre donc $\mu_0 \neq 0$. On obtient le résultat en posant pour $i \in [|1,r|], \lambda_i = -\frac{\mu_i}{\mu_0}$

Compléments

Théorème des fonctions implicites

Théorème 2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$, (a,b) un point de U, et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^r)$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que $\det D_y f(a,b) \neq 0$.
Alors, l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y, i.e : il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}^r$, avec $V \times W \subset U$ et une application $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$(x \in V, y \in W, f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V, y = \varphi(x))$$

De plus, $D_y f(x_0, y_0)$ est inversible pour tout $(x_0, y_0) \in V \times W$

Applications

Théorème spectral, inégalité arithmético-géométrique