Générateurs du groupe linéaire

Référence(s) :
– S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas - *Oraux X-ENS, algèbre 2*

Soit $n \geqslant 2$; Soit K un corps.

Définition 1

On appelle matrice de transvection tout matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $i \neq j$ et $\lambda \in K$
On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$, où $\alpha \in K^*$.

Théorème 1

– *L'ensemble des matrices de transvection engendre le groupe $SL_n(K)$*
– *L'ensemble des matrices de transvection et de dilatation engendre le groupe $GL_n(K)$*

Les matrices de transvection sont toutes de déterminant 1, donc elles engendrent un sous groupe de $\mathrm{SL}_n(K)$. La multiplication à gauche (respectivement à droite) par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ correspond à l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$). Par ailleurs, on peut remarquer qu'on peut échanger deux lignes (ou deux colonnes), uniquement à l'aide de transvections mais modulo un changement de signe : la multiplication à gauche par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ a pour effet de remplacer L_i par L_j et L_j par $-L_i$ (on ne pourrait pas échanger sans changer le signe, parce que sinon on changerait le déterminant).

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. On va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss, nous allons transformer A en une matrice de dilatation ; mais en utilisant uniquement des transvections.
Comme A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle. S'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$, alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a_{11}-1}{a_{i1}} L_i$ permet de mettre un coefficient 1 en position $(1,1)$. Sinon, nécessairement $a_{11} \neq 0$ et on fait $L_1 \leftarrow L_2$ et $L_2 \leftarrow -L_1$ pour se ramener au cas précédent.
Ensuite, en utilisant le coefficient $(1,1)$ comme pivot, une succession d'opérations sur les lignes puis sur les colonnes permet d'annuler tous les autres coefficients de la première ligne et de la première colonne : il existe des matrices de transvection $M_1, \dots, M_p$ et $N_1, \dots, N_q$ telles que

$$M_p \dots M_1 A N_1 \dots N_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$.

On itère se procédé sur A_1 et ainsi de suite jusqu'à $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha = \det A$. Ainsi, il existe des matrices de transvection $U_1, \dots, U_r$ et $V_1, \dots, V_r$ telles que

$$A = U_r \dots U_1 D_n(\det A) V_1 \dots V_s$$

Ainsi, tout matrice de $\mathrm{SL}_n(K)$ s'écrit comme produit de matrices de transvection et toute matrice de $\mathrm{GL}_n(K)$ s'écrit comme produit de matrices de transvection et de dilatation.

Corollaire 1

On prend $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe $SL_n(K)$ est connexe par arcs

Soit $A \in \mathrm{SL}_n(K)$. Montrons que A est reliée par un arc continu à l'identité I_n.
D'après le théorème, il existe une suite finie X de couples de $[|1,n|]^2 \setminus \{(i,i), i \in [|1,n|]\}$, et des scalaires $(\lambda_C)C \in X$ tels que

$$A = \prod_{C \in X} T_C(\lambda_C)$$

On pose $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{SL}_n(K) \\ t & \longmapsto & A_t = \prod\limits_{C \in X} T_C(t\lambda_C) \end{array} \right.$. Alors, on obtient un arc continu de $\varphi(0) = I_n$ à $\varphi(1) = A$

Corollaire 2

Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices inversibles diagonalisables.

Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection et dilatation, et que les matrices de dilatation sont inversibles diagonales, il suffit de montrer que toute matrice de transvection peut s'écrire comme un produit de matrices diagonalisables.
Soit $M = I_n + \lambda E_{ij}$ une matrice de transvection. Soit D une matrice diagonale avec ses coefficients diagonaux deux à deux distincts et non nuls. Alors

$$M = D^{-1}(DM)$$

De plus, D^{-1} est diagonalisable ; et DM est triangulaire avec ses coefficients diagonaux deux à deux distincts (même diagonale que D) : elle est diagonalisable.
Ainsi, l'ensemble des matrices diagonalisables inversibles engendre le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.