Processus de Galton-Watson

Référence(s) :
– ???

Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{k\in\mathbb{N}} kp_k < \infty$.
Soit $(X_i^j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires iid de loi $\mathbb{P}_X$. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n \end{cases}$$

Principe : On modélise la taille d'une population : (Z_n) symbolise le nombre d'individus de la n-ème génération, et X_i^n le nombre de descendant de l'individu i de la n-ème génération (les individus qu'on considère génèrent des enfants tous seuls) [1].
On va étudier (Z_n) et on va essayer de calculer la probabilité que la population s'éteigne $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$.

Lemme 1 (*Preuve à l'oral*)

On a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in \mathbb{N}$: $Z_n \perp\!\!\!\perp X_i^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et de la famille $(X_i^{n-1})_{i\in\mathbb{N}}$. Ainsi, Z_n ne dépend que des $(X_i^j)_{i\geqslant 0; j<n}$. Par indépendance des variables X_i^j, on a le résultat : pour tout $i \in \mathbb{N}$: $Z_n \perp\!\!\!\perp X_i^n$.

Définition 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$; et $\pi_\infty = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction.

Comme $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, la suite d'évènements $(\{Z_n = 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et on a :

$$\pi_\infty = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi_n$$

Si $p_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n \geqslant 1$ et $\pi_\infty = 0$
Si $p_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ et $\pi_\infty = 1$
On suppose donc maintenant que $p_0 \in]0, 1[$.

Proposition 1

Soit $G : s \mapsto \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ la fonction génératrice de X. Alors :

1. *La fonction G est bien définie sur $[0, 1]$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.*
2. (a) *La fonction G est strictement croissante sur $]0, 1[$*
   (b) *G est convexe sur $]0, 1[$*
   (c) *G est strictement convexe sur $]0, 1[$ ssi $p_0 + p_1 < 1$*

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $s \mapsto p_k s^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k 1^k$ converge (vers 1) et la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}^{k} p_k s^{k-1}$ converge normalement (car X intégrable), donc uniformément sur $[0, 1]$.
   Ainsi, la fonction G est bien définie sur $[0, 1]$, et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
   On a maintenant besoin du théorème d'Abel angulaire pour assurer la continuité en 1 et d'un théorème de limite de la dérivée pour assurer la continuité de la dérivée en 1 Compléter (cf. Pommellet)

1. Par exemple, on peut considérer qu'on ne compte que les hommes (ou que les femmes)

2. La série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k s^k$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$, donc

$$\forall s \in [0,1[, G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \text{ et } G''(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$$

Comme $p_0 < 1$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{k_0} > 0$.

(a) $\forall s \in]0,1[$, $G'(s) \geqslant k_0 p_{k_0} s^{k_0-1} > 0$.

(b) $\forall s \in]0,1[, G''(s) \geqslant 0$

(c) Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $k_0 = 1$ et G est affine donc pas strictement convexe sur $]0,1[$

Si $p_0 + p_1 < 1$, on peut choisir $k_0 > 1$ et alors $\forall s \in]0,1[, G''(s) \geqslant k_0(k_0-1)p_{k_0} s^{k_0-2} > 0$ d'où la stricte convexité

Proposition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $G_n : s \mapsto \mathbb{E}[s^[Z_n]] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) s^k$ la série génératrice de Z_n.
Comme précédemment, on montre que G_n est bien définie sur $[0,1]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G^n$ sur $[0,1]$. (composition)

On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $n = 1$: Z_1 est de loi $\mathbb{P}_X$ et donc $G_1 = G$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $s \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}}\right] &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i^n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{Z_n=j} \prod_{i=1}^{} j s^{X_i^n}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{Z_n=j} \prod_{i=1}^{j} s^{X_i^n}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{Z_n=j}\right] \prod_{i=1}^{j} \mathbb{E}\left[s^{X_i^n}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \mathbb{E}\left[s^X\right]^j = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) G(s)^j \\
&= G_n(G(s)) \underset{HR}{=} G^{n+1}(s)
\end{aligned}$$

Proposition 3

La probabilité d'extinction π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$.

D'après la proposition précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $s \in [0,1]$, $G_{n+1}(s) = G(G_n(s))$. En évaluant en 0, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \pi_{n+1} = G(\pi_n)$$

Par continuité de G sur $[0,1]$, π_∞ est un point fixe de G.
Montrons que c'est le plus petit : soit u un point fixe de G. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n \leqslant u$.
- On a $\pi_1 = G(\pi_0) = G(\mathbb{P}Z_0 = 0) = G(0) \leqslant G(u) = u$ car $u \geqslant 0$ et G croissante.
- Supposons que $\pi_n \leqslant u$. Alors, par croissance de G : $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leqslant G(u) = u$

Par passage à la limite, on obtient $\pi_\infty \leqslant u$.

Théorème 1

Si $m \leqslant 1$, alors $\pi_\infty = 1$.
Si $m > 1$, alors π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$

- Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $G : s \mapsto p_0 + s p_1$, avec $p_0 > 0$, donc $G \neq Id$; il y a un unique point fixe qui est 1.
- Sinon, G est strictement convexe sur $]0,1[$, donc $x \mapsto G(x) - x$ aussi. Ainsi, $G - Id$ s'annule au plus deux fois ; $G'(0) = p_1$ et $G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = 1$

Si $m > 1$

x	0	$\pi\infty$	α		1
$G'(x)-1$	p_1-1	$-$	0	$+$	$m-1$
$G(x)-x$	p_0 $\searrow$	0 $\searrow$		$\nearrow$	0

π_∞ est donc l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

Si $m \leqslant 1$

x	0		1
$G'(x)-1$	p_1-1	$-$	$m-1$
$G(x)-x$	p_0	$\searrow$	0

Ainsi, $\pi_\infty = 1$

Complément : calcul de l'espérance de la taille de la population

Théorème 2

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[Z_n] = m^n$