NP complétude du problème de l'existence d'un chemin hamiltonien dans un graphe orienté

Manon Ruffini

On admet que le problème 3-SAT est NP-complet. (cf. théorème de Cook)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

Définition 1

Un chemin dans G est dit hamiltonien lorsqu'il passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.

Définition 2

On note HAM(G, s, t) le problème de décision suivant :
Entrée : Un graphe $G = (S, A)$, deux sommets $s, t \in S$
Sortie : Oui, ssi il existe un chemin hamiltonien reliant s à t dans G.

Théorème 1

HAM est NP-complet.

Étape 1

HAM est dans NP.

Étant donné un chemin $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dans G, pour vérifier qu'il convient, il suffit de vérifier :
- $s = s_1$ et $t = s_n$,
- n est égal au nombre de sommets de G,
- Pour tout $i \neq j \in [|1, n|], s_i \neq s_j$

On peut le faire en temps polynômial.

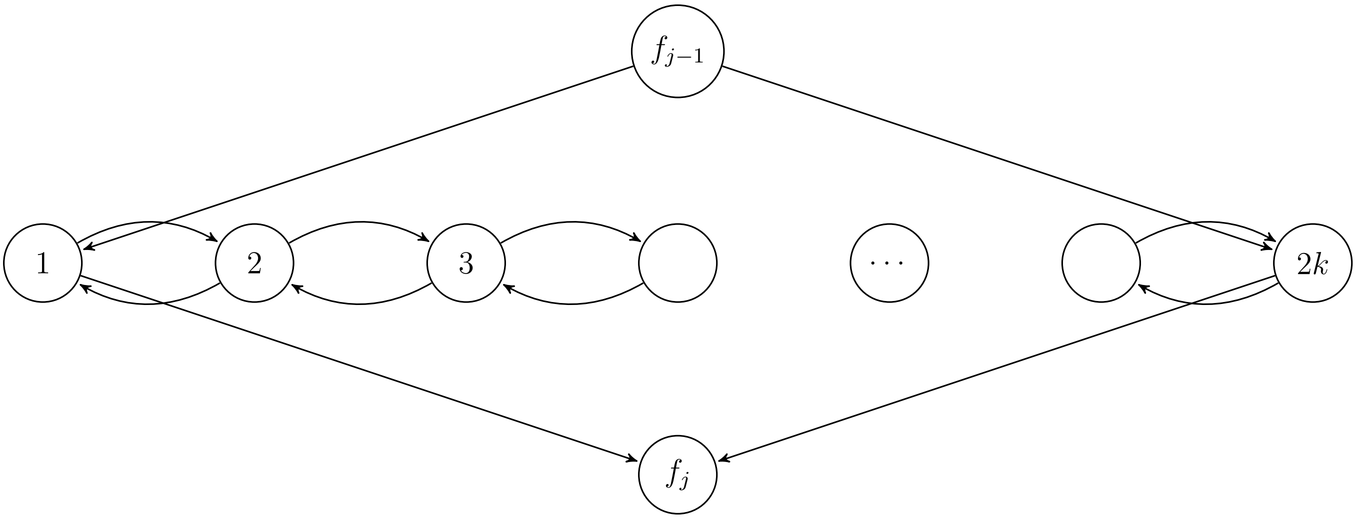
Montrons maintenant que HAM est NP-dur. Pour cela, on va réduire 3-SAT à HAM. Comme 3-SAT est NP-dur, on aura le résultat.

Étape 2

A chaque instance de 3-SAT, on va associer une instance de HAM.

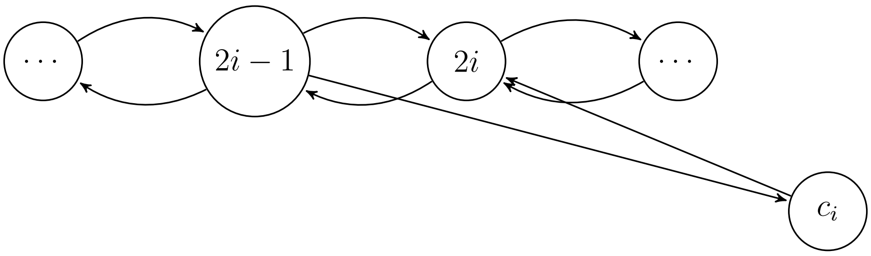
Soit $\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_k$ une formule en forme conjonctive, telle que chaque clause contient au plus trois littéraux. Soit m le nombre de **variables** apparaissant dans φ. On note les variables $x_1, \ldots, x_m$
Si x et $\bar{x}$ apparaissent dans une même clause, elle est toujours satisfaite. Donc, on peut supposer que ce n'est pas le cas : on suppose qu'une variable apparaît toujours AU PLUS une fois par clause.

On associe à φ le graphe orienté G_φ sommets, défini comme suit :
- A chaque clause c_i on associe un unique sommet
- A chaque variable x_j on associe une partie du graphe orienté appelé gadget :

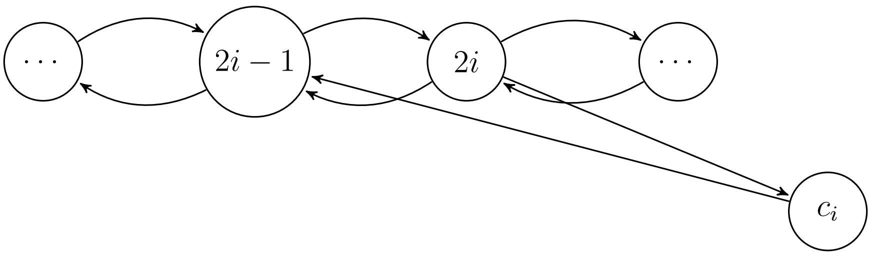


— Pour le graphe G_φ, on met bout à bout les gadgets
— Si la variable x_j apparaît dans la clause c_i, il y a deux arêtes reliant c_i et les sommets $2i-1$ et $2i$ du **gadget de la variable** x_j comme suit :

Si x_j apparaît positivement :



Si x_j apparaît négativement :



Le sommet de départ est le premier sommet du gadget de la première variable ($s = f_0$). Le sommet d'arrivée est le dernier sommet du gadget de la dernière variable ($t = f_m$).
Comme le graphe G_φ contient $2km + (m+1) + k$ sommets, on le construit en temps polynômial à partir à partir de φ.

Étape 3

Si φ est satisfiable, alors il existe un chemin hamiltonien dans G_φ reliant f_0 à f_m

Supposons que φ est satisfiable. Il existe une valuation ν telle que $\nu(\varphi) = 1$.
Ainsi, pour chaque clause c_i, il existe une variable $x_{j(i)}$ telle que :

$$(*) \begin{cases} \text{ou bien } \nu(x_{j(i)}) = 1 \text{ et } x_{j(i)} \text{ apparaît positivement dans } c_i \\ \text{ou bien } \nu(x_{j(i)}) = 0 \text{ et } x_{j(i)} \text{ apparaît négativement dans } c_i \end{cases}$$

On construit un chemin hamiltonien de f_1 à f_m en parcourant chaque gadget
— de gauche à droite lorsque $\nu(x_j) = 1$, en faisant un détour par les c_i qui n'ont pas été visités et dans lesquels x_j apparaît positivement ;
— de droite à gauche lorsque $\nu(x_j) = 0$, en faisant un détour par les c_i qui n'ont pas été visités et dans lesquels x_j apparaît négativement.

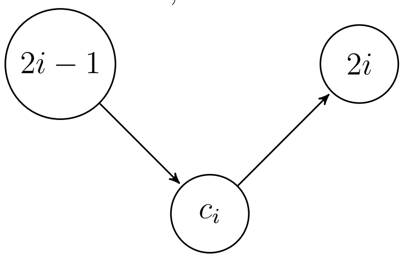
Ainsi, on parcourt une et une seule fois les sommets de chaque gadget ; et chaque sommet c_i est rencontré d'après $(*)$.

Étape 4

S'il existe un chemin hamiltonien de f_0 à f_m dans G_φ, alors φ est satisfiable.

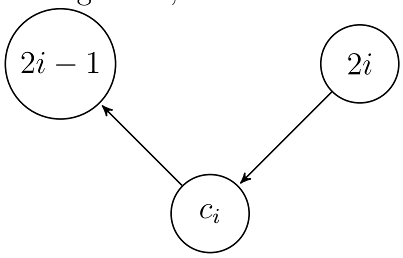
Supposons qu'il existe un chemin hamiltonien de f_0 à f_m.
Chaque gadget de G_φ est donc parcouru ; soit de gauche à droite, soit de droite à gauche. On construit une valuation ν comme suit :
Pour chaque variable x_j, on pose $\nu(x_j) = 1$ si le gadget associé à x_j est parcouru de gauche à droite, et $\nu(x_j) = 0$ s'il est parcouru de droite à gauche.
Pour chaque clause, si on arrive d'un gadget, on repart forcément dans ce même gadget sinon tous ses sommets ne seront pas parcourus. Ainsi, pour chaque clause c_i, il existe une variable x_j telle que c_i est visité lors du parcours du gadget associé à x_j. Alors :

— Si le gadget est parcouru de gauche à droite, on est dans le cas :



Par construction, x_j apparaît positivement dans c_i ; et $\nu(x) = 1$. Donc $\nu(c_i) = 1$.

— Si le gadget est parcouru de droite à gauche, on est dans le cas :



Par construction, x_j apparaît négativement dans c_i ; et $\nu(x_j) = 0$. Donc $\nu(c_i) = 1$.

Finalement,

$$\forall i \in [|1, k|], \nu(c_i) = 1$$

Donc, $\nu(\varphi) = 1$ et φ est satisfiable.

Étape 5

Conclusion

On a réduit le problème 3-SAT au problème HAM, donc HAM est NP-dur.

Finalement : **HAM est NP-complet.**

Références

[1] Olivier Carton, *Langages formels*. Vuibert, 2014.