Ellipsoïde de John-Loewner

Manon Ruffini

Oraux X-ENS, Algèbre 3

Théorème 1 (*John-Loewner*)

Soit K un compact d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal, contenant K.

Démonstration : On note Q l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$, Q^+ l'ensemble des formes quadratiques positives, et Q^{++} l'ensemble des formes quadratiques définies positives.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.
Un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ centré en 0 a une équation du type : $q(x) \leq 1$, où $q \in Q^{++}$. Pour $q \in Q^{++}$, on note : $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$.

– **Étape 1**

Soit V_q le volume de $\mathcal{E}_q$, où $q \in Q^{++}$. Alors :

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}, \text{où } V_0 \text{ désigne le volume de la boule unité.}$$

Démonstration : Comme $q \in Q^{++}$, il existe $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ base orthonormale telle que :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n, q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \text{ les } a_i > 0$$

. Alors :

$$V_q = \int_{\sum a_i x_i^2 \leq 1} dx_1 ... dx_n$$

Le changement de variable défini par : $t_i = \sqrt{a_i} x_i$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de jacobien $|J| = \frac{1}{\sqrt{a_1 ... a_n}}$.
Donc, $V_q = \int_{\sum t_i^2 \leq 1} \frac{dt_1 ... dt_n}{\sqrt{a_1 ... a_n}}$.
Soit S la matrice de q dans une base quelconque orthonormale. Alors : $\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n) = {}^t PSP$ et $\det S = a_1 ... a_n$. Ainsi, le déterminant de q, $D(q) = \prod_{i=1}^{n} a_i$, ne dépend pas de la base orthonormée choisie, et

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{a_1 ... a_n}}$$

■

On peut donc reformuler le problème :
Il s'agit de montrer qu'il existe une unique $q \in Q^{++}$, telle que $D(q)$ soit maximal et $\forall x \in K, q(x) \leq 1$.

– **Étape 2**

Soit $N : q \in Q \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$. N est une norme sur Q. Soit $A := \{q \in Q^+, \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$.
A est un convexe compact non-vide de Q.

Démonstration : Soient $q, q' \in A$, Soit $\lambda \in [0, 1]$, Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\lambda q(x) + (1 - \lambda) q'(x) \geq 0 \text{ donc } \lambda q + (1 - \lambda q') \in Q^+$$

Soit $x \in K$.

$$\lambda q(x) + (1 - \lambda) q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \text{ donc } \lambda q + (1 - \lambda) q' \in A$$

Donc A est convexe

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge dans Q^+ (fermé). Soit q la limite. Montrons $q \in A$:
$\forall x \in \mathbb{R}^n, |q_n(x) - q(x)| \leq N(q - q_n) \|x\|$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \to q(x)$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \geq 0$ et $\forall x \in K, q_n(x) \leq 1$, par passage à la limite :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in K, q(x) \leq 1$$

Donc A est fermé.

Comme $\mathring{K}$ n'est pas vide, $\exists a \in \mathring{K}$ et $\exists r > 0, \mathcal{B}(a,r) \subset K$. Soit $q \in A$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $\|x\| \leq r$: $a + x \in K$ et $q(a+x) \leq 1$. Donc, par Minkowski :

$$\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$

Si $\|x\| \leq 1$:

$$|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$$

Donc $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$. C'est vrai pour tout $q \in A$, donc A est borné.

Comme K est borné, $\exists M > 0, \forall x \in K, \|x\| \leq M$. Soit $q_1 : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n, q_1(x) \geq 0$, avec égalité ssi $x = 0$; et $\forall x \in K, q_1(x) \leq 1$, par définition de M. Donc $q \in A$, et A est non-vide. ■

Par continuité du déterminant : $q \mapsto D(q)$ est continue sur le compact A. Donc D admet un maximum sur A, et atteint ce maximum en un point. Soit q_0 ce point.
On a vu : $q_1 \in A \cap Q^{++}$ donc $D(q_1) > 0$ donc $q_0 \in Q^{++}$.

$$\exists \mathcal{E}_{q_0} \text{ de volume minimal qui contient } K$$

Il reste maintenant à montrer que cet ellipsoïde est unique.

– **Étape 3**

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. Alors :

$$\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

Démonstration : D'après le théorème de pseudo-réduction : $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, les $\lambda_i > 0$ telles que : $A =^t PP, B =^t PDP$.

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha (\det P^2 \det D)^\beta = \det P^2 (\det D)^\beta$$
$$\det(\alpha A + \beta B) = \det P^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$$

Il faut donc montrer : $\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det D)^\beta$, i.e. :

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta$$

C'est-à-dire (en prenant le logarithme) :

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i$$

Par concavité du logarithme : pour tout $1 \leq i \leq n$, $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln 1 + \beta \ln \lambda_i = \beta \ln \lambda_i$. On obtient le résultat en sommant les inégalités.
Pour $A \neq B$ et $0 < \alpha < 1$, un au moins des λ_i n'est pas égal à un, donc l'une des inégalités est stricte et on obtient :

$$\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

■

– **Conclusion :**

Maintenant, supposons qu'il existe $q \in A$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$. Alors : Soient S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a : S et $S_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Comme A est convexe, $\frac{1}{2}(q + q_0) \in A$ et d'après le résultat précédent :

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}} (\det S_0)^{\frac{1}{2}} = D(q_0)$$

Cela contredit la maximalité de $D(q_0)$, d'où le résultat. ■