Théorème de Liapounov

Rouvière, Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, page 138

Théorème 1 (*Liapounov*)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :
- $f(0) = 0$
- $Df(0)$ *a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative*

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{array} \right. \text{, d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

Alors : 0 est un point d'équilibre attractif du système, i.e. il existe V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que, si $x \in V$, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Démonstration : Soit $A = Df(0)$; Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. Alors :

- **Étape 1**

Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, ||e^{tA}x|| \leq P(|t|) \left(\sum_{j=0}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)} \right) ||x||$$

Démonstration : Si $\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{k}(X - \lambda_j)^{m_j}$, alors, d'après le lemme des noyaux :

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{j=1}^{k} \ker((A - \lambda_j)^{m_j})$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, x se décompose de manière unique en : $x_1 + ... + x_k$, avec $\forall j \in [|1, k|], x_j \in E_j := \ker((A - \lambda_j)^{m_j})$. Chaque E_j est stable par A et :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [|1, k|], \forall t \in \mathbb{R}, e^{tA}x_j &= e^{t\lambda_j I_n} e^{t(A - \lambda_j I_n)} x_j \\
&= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j \\
&= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda j I_n)^p \right) x_j \text{ car } x_j \in E_j
\end{aligned}$$

Si on munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [|1, k|], \forall t \in \mathbb{R}, \left\| e^{tA} x_j \right\| &= \left\| e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda j I_n)^p \right) x_j \right\| \\
&\leq e^{t\Re(\lambda_j)} C_j \mid \sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} \mid \|x_j\| \text{ où } C_j = \max_{0 \leq p < m_j} \|A - \lambda_j I_n\|^p \\
&\leq e^{t\Re(\lambda_j)} C_j (1 + |t|)^{m_j - 1} \|x_j\| \\
&\leq C e^{t\Re(\lambda_j)} (1 + |t|)^{n-1} \|x_j\| \text{ où } C = \max_{1 \leq j \leq k} C_j \text{ , car } m_j \leq n
\end{aligned}$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{p=0}^{m_j-1}\frac{t^p}{p!}\right| &\leq \sum_{p=0}^{m_j-1}\binom{m_j-1}{p}|t|^p\underbrace{\frac{(m_j-1-p)!}{(m_j-1)!}}_{\leq 1}\\
&\leq \sum_{p=0}^{m_j-1}\binom{m_j-1}{p}|t|^p=(1+|t|)^{m_j-1}
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour $x\in\mathbb{R}^n$, vu comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$,

$$
\begin{aligned}
\left\|e^{tA}x\right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \mu\left\|e^{tA}x\right\|_{\mathbb{C}^n}\\
&\leq \mu\sum_{j=1}^{k}\left\|e^{tA}x_j\right\|_{\mathbb{C}^n}\\
&\leq \mu C(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k}e^{t\Re(\lambda_j)}\right)\underbrace{\max_{1\leq j\leq k}\|x_j\|_{\mathbb{C}^n}}_{\leq\nu\|x\|_{\mathbb{C}^n}}\\
&\leq P(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k}e^{t\Re(\lambda_j)}\right)\|x\|_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}
$$

où $\mu,\nu\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$, par équivalence des normes en dimension finie. ■

Étape 2

On considère le système linéarisé en 0 :

$$
\left\{\begin{array}{l} z'=Az\\ z(0)=x\end{array}\right.\text{, d'inconnue } z\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)
$$

Alors : $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t\to\infty$

Démonstration : Le système linéarisé admet pour unique solution globale : $z:t\mapsto e^{tA}x$. Comme les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative : $\exists a>0,\forall j\in[|1,k|],\Re(\lambda_j)<-a$. Ainsi, $P(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k}e^{t\Re(\lambda_j)}\right)e^{at}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$ et donc $\exists C>0,\forall t\in\mathbb{R}_+,P(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k}e^{t\Re(\lambda_j)}\right)\leq Ce^{-at}$. Donc, d'après le lemme,

$$
\forall t\in\mathbb{R}_+,\|z(t)\|\leq Ce^{-at}\|x\|
$$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre attractif du système linéarisé. ■

Étape 3

L'intégrale $b(x,y)=\int_0^\infty(e^{tA}x|e^{tA}y)dt$ définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, de forme quadratique associée q. On a : $(\nabla q(x)|Ax)=-||x||^2$

Démonstration : D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'étape 2 :

$$
\forall t\in\mathbb{R}_+,\forall x,y\in\mathbb{R}^n,|(e^{tA}x|e^{tA}y)|\leq\left\|e^{tA}x\right\|\left\|e^{tA}x\right\|\leq C^2e^{-2at}\|x\|\|y\|
$$

Donc b est bien définie. De plus, c'est bien une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, et on a :

$$
\forall x\in\mathbb{R}^n,q(x)=\int_0^\infty\left\|e^{tA}x\right\|^2dt\geq 0
$$

De plus, si $q(x)=0$, la fonction sous l'intégrale est identiquement nulle, donc $x=0$. Donc q est définie positive.
Par ailleurs, pour $x,h\in\mathbb{R}^n$, on a : $q(x+h)=q(x)+2b(x,h)+q(h)$. D'où : $Dq(x)\cdot h=2b(x,h)$. Donc,

pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(\nabla q(x)|Ax) &= Dq(x)Ax \\
&= \int_0^\infty 2(e^{tA}x|e^{tA}Ax)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{tA}x|e^{tA}x)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\left[\left\|e^{tA}x\right\|^2\right]_0^T \\
&= -\|x\|^2 \text{ d'après l'étape 2}
\end{aligned}$$

■

– **Étape 4**

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale y au système différentiel, définie sur un intervalle maximal $I := [0, \delta[$, $\delta \in]0, \infty]$. On note : $r(y) = f(y) - Ay$

$$q(y)' = -||y||^2 + 2b(y, r(y)) \text{ et } \exists\alpha, \beta > 0, q(y) \leq \alpha \Rightarrow -||y||^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned}
q(y)' &= \frac{d}{dt}q(y) = Dq(y)(y') \\
&= 2b(y, y') \\
&= 2b(y, f(y)) = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \\
&= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))
\end{aligned}$$

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz : $|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$. De plus, $r(y) = f(y) - f(0) - Df(0)y$. Donc, par définition de la différentielle : $r(y) = \sqrt{q(y)}\eta(y)$, où $\eta(y) \to_{\|y\|\to 0} 0$. Donc : $\sqrt{q(r(y))} = \sqrt{q(\eta(y)\sqrt{q(y)})} = \sqrt{q(y)}\sqrt{q(\eta(y))}$.
Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de $v \mapsto \sqrt{q(v)}$,

$$\exists\alpha > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, q(y) \leq \alpha \Rightarrow \sqrt{q(\eta(y))} \leq \epsilon \text{ donc } \sqrt{q(r(y))} \leq \epsilon\sqrt{q(y)}$$

Ainsi : $2b(y, r(y)) \leq 2\epsilon q(y)$.
Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, les normes $\|\cdot\|$ et $\sqrt{q}$ sont équivalentes. Donc, $\exists K > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, Kq(y) \leq \|y\|^2$. Soit $\beta = K - 2\epsilon$ ($\beta > 0$ si $\epsilon < C/2$). On obtient :

$$q(y)' \leq -\beta q(y)$$

■

– **Conclusion :**
Supposons $q(x) < \alpha$. Alors : $\forall t \geq 0, q(y(t)) < \alpha$. Sinon, on aurait :
Si $t_0 := \inf\{t > 0, q(y(t)) = \alpha\}$, $q(y)'(t_0) \geq -\beta y(t_0) = -\beta\alpha < 0$ et donc, pour $t < t_0$, proche de t_0, $q(y(t)) > \alpha$, ce qui contredit la minimalité de t_0.
Ainsi, y reste dans un compact donc y est définie sur $[0, \infty[$, et $\forall t \geq 0, q(y)'(t) \leq -\beta q(y(t))$. Donc :

$$\forall t \geq 0, \frac{d}{dt}(e^{\beta t}q(y(t))) = e^{\beta t}(q(y)'(t) + \beta q(y(t))) \leq 0$$

En particulier :

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t}q(x)$$

D'où le résultat par équivalence de $\|\cdot\|$ et $\sqrt{q}$. ■