

Lemme de Morse

Référence(s) :

– FRANÇOIS ROUVIÈRE - *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, page(s)

Théorème 1

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est non-dégénérée de signature $(p, n - p)$. Alors :

Il existe un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme φ entre deux voisinages de $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \text{ où } u := \varphi(x)$$

Étape 1

Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et une fonction $\rho : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :

$$\forall A \in V, {}^t\rho(A)A_0\rho(A) = A$$

Soit $\hat{\varphi} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$. La fonction $\hat{\varphi}$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(I + H) - \hat{\varphi}(I) &= {}^t(I + H)A_0(I + H) - A_0 = {}^tHA_0H + A_0H + {}^tH1_0H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + {}^tHA_0H = {}^t(A_0H) + A_0H + O(\|H\|^2) \end{aligned}$$

Ainsi, $D\hat{\varphi}(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$ et

$$H \in \ker \hat{\varphi}(I) \Leftrightarrow A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On remarque que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et on pose $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_0H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$.

Soit $\psi = \hat{\varphi}|_F : F \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$I_n \in F$$

$$\ker \psi(I) = \ker(F\hat{\varphi}(I)) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$$

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim F$$

Ainsi : $D\psi(I)$ est inversible et ψ est de classe $\mathcal{C}^1$; donc on peut applique le théorème d'inversion locale :

Il existe un voisinage ouvert U de I dans F (et on peut supposer que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$, par continuité du déterminant), tel que :

$$\psi : U \rightarrow V = \psi(U)$$

soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi^{-1}(A)A_0\psi^{-1}(A)$$

Il suffit de poser :

$$\rho = \psi^{-1}$$

Étape 2

On applique Taylor avec reste intégral à l'ordre 1

On a :

$$f(x) - f(0) - Df(0)x = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)(x, x)dt$$

C'est-à-dire : $f(x) - f(0) = {}^t x Q x$ où $Q : \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Étape 3

Preuve du théorème

Ici, pour tout x , $Q(x)$ est symétrique et $Q(0) = \frac{1}{2}D^2f(0)$ est inversible. D'après le lemme, il existe un voisinage V de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une fonction $\rho : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall A \in V, {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A) = A$$

Comme Q est continue, il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que : pour tout $x \in W$, $Q(x) \in V$ et alors :

$$Q(x) = {}^t\rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x))$$

Soit $x \in W$. On pose : $M(x) = \rho(Q(x))$ et $y = M(x)x$. Alors :

$$f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y$$

Or, $Q(0) = \frac{1}{2}D^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$. D'après le théorème d'inertie de Sylvester, il existe une matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tAQ(0)A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

En posant $y = Au$ ($u = A^{-1}y$), on obtient :

$${}^tyQ(0)y = {}^tu{}^tAQ(0)Au = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

On pose donc :

$$\varphi : \begin{cases} W & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & A^{-1}M(x)x \end{cases}$$

On a bien : $\varphi(0) = 0$, φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur W ; et f a l'expression souhaitée.

Enfin, pour tout $h \in W$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(h) - \varphi(0) &= A^{-1}M(h)h - A^{-1}M(0)(0) \\ &= A^{-1}(M(0) + o(1))h = A^{-1}M(0)h + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Ainsi, $D\varphi(0) = A^{-1}M(0)$ qui est inversible. On applique le théorème d'inversion locale à φ , qui est donc un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux voisinages de 0.