Méthode de Newton

Référence(s) :
- F. Rouvière - *Petit guide du calcul différentiel*, page(s)

Théorème 1

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $(c < d)$. On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et pour tout $x \in [c,d], f'(x) > 0$. Alors, il existe un unique $a \in]c,d[$, $f(a) = 0$.

Tant que ça a un sens, on pose : $\begin{cases} x_0 \in [c,d] \\ \forall n \geqslant 0, x_{n+1} = F(x_n) o F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$ *Alors :*

- *Il existe $C > 0$ tel que si $|x_0 - a| < \frac{1}{C}$, alors x_n est bien défini pour tout n. De plus, $|x_n - a| \leqslant |x_0 - a|$ et $x_n \to a$ à vitesse quadratique.*
- *Si $f'' > 0$, la suite $(x_n)_n$ est bien définie et pour tout n, $x_n > a$. De plus :*

$$x_{n+1} - a \sim_{+\infty} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

- Soit $x \in [c,d]$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a \\ &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe un $z \in]a,x[$ (ou $]x,a[$) tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{f'(x)}\frac{(a-x)^2}{2}f''(z)$$

- Soit $C = \frac{\max|f''|}{\min|f'|} > 0$. Alors, $|F(x) - a| \leqslant C|x-a|^2$ c/2 ?.
  Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{C}\right[$ tel que $I := [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$. Alors,

$$x \in I \Rightarrow |F(x) - a| \leqslant C\alpha^2 < \alpha \Rightarrow F(I) \subset I$$

  Donc, si $x_0 \in I$, i.e. $|x_0 - a| < \frac{1}{C}$, la suite $(x_n)_n$ est bien définie.
  De plus, si $x_0 \in I$, alors

$$\begin{aligned} C|x_{n+1} - a| &= C|F(x_n) - a| \\ &\leqslant C^2|x_n - a|^2 \\ &\leqslant \dots \\ &\leqslant (C|x_0 - a|)^{2^n} \\ &\leqslant (C\alpha)^{2^n} \end{aligned}$$

  Comme $C\alpha < 1$, on a bien $x_n \to a$ et la convergence est quadratique.
- On suppose que $f'' > 0$ (i.e. f est strictement convexe). Pour $x \in]a,d]$, on a $F(x) = x - \frac{f(x)}{f''(x)} \leqslant x$, avec inégalité stricte si $x \neq a$.
  Alors, si $x_0 \in]a,d]$, la suite $(x_n)_n$ est bien définie et strictement décroissante ou stationnaire.
  De plus, $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}(x-a)^2 \geqslant 0$, avec inégalité stricte si $x > a$.
  Donc, $0 \leqslant F(x) - a \leqslant x - a$, donc $a < x_n < x_0 < d$, pour tout n, c'est-à-dire que $[a,d]$ est stable par F.
  La suite $(x_n)_n$ est décroissante et minorée, donc elle converge. Soit l sa limite. Alors $F(l) = l$, i.e. $f(l) = 0$

et donc $l = a$.
Comme précédemment, on montre que la convergence est quadratique.[1]

- Cette inégalité est essentiellement optimale[2].
  Si $a < x_0 \leqslant d$, alors pour tout n, $x_n > a$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $z_n \in]a, x_n[$, tel que $\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(z_n)}$. Or, $\frac{f''(z_n)}{f'(z_n)} \to \frac{f''(a)}{f'(a)}$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $z_n \to a$.
  Ainsi, $x_{n+1} - a \sim_{+\infty} \frac{(x_n-a)^2}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}$

1. En effet, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \frac{1}{C}$
2. KESAKO ? ? ?