Opérades et homotopie

Manon RUFFINI

Stage effectué du 05/05/2014 au 30/05/2014 à l'Institut de Mathématiques
de Toulouse sous la direction de Joan MILLES.

Table des matières

Introduction

Une opérade permet de coder un "type" d'algèbre. On ne définit pas l'algèbre par des opérations et des relations, on préfère donner toutes les opérations sur un nombre fini de variables ainsi que toutes les relations entre ces opérations.
La notion d'opérade a d'abord été mise en place dans un contexte topologique pour étudier l'espace des lacets, puis a été étendue au domaine algébrique.
Nous étudierons ici deux exemples d'opérades topologiques : Ass et A_∞. Nous verrons que la donnée d'un Ass-espace équivaut à la donnée d'un espace topologique muni d'une loi de composition interne associative. Nous essaierons ensuite d'appréhender le type d'espace codé par l'opérade A_∞.
Pour ce faire, nous définirons dans un premier temps la notion d'opérade algébrique, puis la notion d'homotopie.

1 Opérades algébriques

1.1 Définitions préalables

1.1.1 Produit tensoriel

Définition 1.1.1. *Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
*Le **produit tensoriel** de V et W, noté $V \otimes_\mathbb{K} W$ est l'espace vectoriel et l'application bilinéaire $V \times W \to V \otimes_\mathbb{K} W$ vérifiant la propriété universelle suivante, pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque :*

$$\forall \phi : V \times W \to E \text{ application bilinéaire}, \exists! \tilde{\phi} : V \otimes_\mathbb{K} W \to E$$

linéaire telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r] \arrow[dr, "\phi"'] & V \otimes_\mathbb{K} W \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Proposition 1.1.1. *Le produit tensoriel est **unique** à isomorphisme près.*

Démonstration. On suppose qu'il existe deux produits tensoriels :

$$\psi_1 : V \times W \to T_1$$

$$\psi_2 : V \times W \to T_2$$

Ces produits vérifient la propriété universelle donc : $\exists! \phi_1, \exists! \phi_2$ linéaires qui rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & T_1 \arrow[d, shift left, "\phi_2"] \\ & T_2 \arrow[u, shift left, "\phi_1"] \end{tikzcd}$$

On a donc :

$$\psi_1 = \phi_1 \circ \psi_2, \psi_2 = \phi_2 \circ \psi_1$$

Donc : $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \psi_1 = \psi_1$ Ainsi, $\phi_1 \circ \phi_2 = \mathrm{Id}$ sur l'image de ψ_1.
Comme les applications sont linéaires, il s'agit maintenant de montrer que : $E := Vect(Im(\psi_1)) = T_1$.
Par l'absurde, supposons que : $\exists x \in T_1 \backslash E$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & T_1 \arrow[d, dotted] \\ & T_1 \end{tikzcd}$$

$\exists ! \phi : T_1 \to T_1$ linéaire qui rende ce diagramme commutatif. Id_{T_1} convient.
Mais, si on note F un sous-espace vectoriel de T_1 tel que $T_1 = E \oplus F$, alors l'application $\mathrm{id}_E \oplus 0_F$ convient également, ce qui contredit l'unicité.

Ainsi, sur une base de T_1, $\phi_1 \circ \phi_2 = \mathrm{id}$. De la même façon, on montre que $\phi_2 \circ \phi_1 = \mathrm{id}$.
Finalement, $T_1 \tilde{=} T_2$ sont isomorphes.

$\square$

Démonstration. Existence
On considère l'espace vectoriel libre, noté $\mathcal{F}(V \times W)$, défini par :

$$\mathcal{F}(V \times W) = \left\{ \sum_{finie} \lambda_{v,w}(v, w) \middle| \lambda_{v,w} \in \mathbb{K}, v \in V, w \in W \right\}$$

Attention : Dans $\mathcal{F}(V \times W)$, pour $\lambda_{v,w} \in \mathbb{K}, v \in V, w \in W$, on a :

$$(\lambda v, w) \neq \lambda(v, w) \neq (\lambda v, \lambda w)$$

On considère maintenant l'espace $\mathcal{R}$ engendré par les relations suivantes :

$$(u + v, w) - (u, w) - (v, w) \qquad \text{où } u, v \in V, w \in W \tag{1}$$
$$(u, w + x) - (u, w) - (u, x) \qquad \text{où } u \in V, w, x \in W \tag{2}$$
$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w) \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}, v \in V, w \in W \tag{3}$$
$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w) \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}, v \in V, w \in W \tag{4}$$

Puis on pose :

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W = \mathcal{F}(V \times W)/\mathcal{R}$$

De plus, on peut définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \to & V \otimes_{\mathbb{K}} W \\ (v, w) & \mapsto & v \otimes w \end{array}$$

On vérifie ensuite que $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ munit de cette application vérifie la propriété universelle :
Soit $\phi : V \times W \to E$ une application bilinéaire, où E est un espace vectoriel.
Analyse : Supposons que : $\exists \tilde{\phi}$ qui satisfait la propriété.
Alors :

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \tilde{\phi}(v \otimes w) = \phi(v, w)$$

Comme $\tilde{\phi}$ est linéaire, elle est uniquement déterminée par la donnée de ϕ.
Synthèse : Soit $\tilde{\phi} : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to E$ l'application linéaire déterminée par :

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \tilde{\phi}(v \otimes w) = \phi(v, w)$$

$\tilde{\phi}$ est bien linéaire car ϕ et $\otimes$ sont bilinéaires.
On a vu : $Im(\psi)$ engendre $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ donc $\tilde{\phi}$ est bien définie sur $V \otimes_{\mathbb{K}} W$.
De plus, sur $V \times W$, $\phi = \tilde{\phi} \circ \psi$.
Donc $\tilde{\phi}$ convient. □

Remarque : Si $(e_i)_{i \in I}$ est un base de V et $(f_j)_{j \in J}$ est une base de W, alors $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est une base de $V \otimes_{\mathbb{K}} W$

Remarque : L'application $\begin{array}{lcl} V \times W & \to & V \otimes_{\mathbb{K}} W \\ (v, w) & \mapsto & v \otimes w \end{array}$ n'est pas surjective.

Remarque : On peut voir que : $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$
Donc, en général on écrit : $U \otimes V \otimes W$

1.1.2 Algèbres

Définition 1.1.2. *Algèbre associative Une* ***algèbre associative*** *est un couple (A, μ) où A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mu : A \otimes_{\mathbb{K}} A \to A$ une application $\mathbb{K}$-linéaire telle que :*

$$\forall a, b, c \in A, \mu\left(a, \mu(b, c)\right) = \mu\left(\mu(a, b), c\right)$$

Remarque On écrit parfois $\mu(a, b) = a \cdot b$ et la relation d'associativité devient :

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

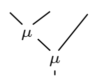
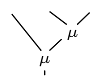
Remarque : Cette définition correspond à la notion de $\mathbb{K}$-algèbre vue en cours.

Définition 1.1.3. *Soient $f : V_1 \to W_1$ et $g : V_2 \to W_2$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
On définit : $f \otimes g : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ par :

$$\forall v \in V, \forall w \in W, (f \otimes g)(v \otimes W) = f(v) \otimes g(w)$$

Remarque On peut alors réécrire l'associativité sous la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes id_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

Remarque Si on note $\mu =$  , l'associativité s'écrit :  $=$ 

Définition 1.1.4. *On dit que (A, μ, η) est une* ***algèbre associative unitaire*** *lorsque : (A, μ) est une algèbre associative et $\eta : \mathbb{K} \to A$ est $\mathbb{K}$-linéaire, donc caractérisée par l'image de $1_{\mathbb{K}}$, telle que, en notant $1_A := \eta(1_{\mathbb{K}})$:*

$$\forall a \in A, \mu(a, 1_A) = \mu(1_A, a) = a$$

(c'est-à-dire : $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$)

Remarque A l'aide de diagrammes :

$$\begin{tikzcd} A\otimes\mathbb{K} \arrow[r, "\mathrm{Id}_A\otimes\eta"] \arrow[dr, "\sim"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{K}\otimes A \arrow[l, "\eta\otimes\mathrm{Id}_A"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Proposition 1.1.2. *En effet,*

$$A \cong \mathbb{K}\otimes A \cong A\otimes\mathbb{K}$$

Démonstration. Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times A & \to & A \\ (\lambda, a) & \mapsto & \lambda a \end{array}$

Soit $\phi : \mathbb{K}\times A \to B$ quelconque où B est un espace vectoriel.
Supposons que : $\exists\tilde{\phi} : A \to B$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}\times A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi"'] & A \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Alors, $\forall a\in A, \tilde{\phi}(a) = \phi(1,a)$ D'où l'unicité.
Inversement, $\tilde{\phi} : a \mapsto \phi(1,a)$ est linéaire et rend le diagramme commutatif.
Ainsi, A vérifie la propriété universelle.
Par unicité du produit tensoriel (à isomorphisme près) :

$$\mathbb{K}\otimes A \cong A$$

De même : $A\otimes\mathbb{K}\cong A$ $\square$

Définition 1.1.5. *Une* ***algèbre commutative*** $(A, \cdot : A^{\otimes_2} \to A)$ *est une algèbre associative* $(A,\cdot)$ *telle que :*

$$\forall (a,b)\in A^2, a\cdot b = b\cdot a$$

Définition 1.1.6. *Une* ***algèbre de Lie*** $(\mathcal{G}, [-,-] : \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}\to\mathcal{G})$ *est un espace vectoriel muni d'une application linéaire antisymétrique :* $[-,-] : \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ *telle que :*

$$\forall a,b,c\in\mathcal{G}, [[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$$

Antisymétrie : $\forall x,y\in\mathcal{G}, [x,y] = -[y,x]$

Définition 1.1.7 (Algèbre augmentée)**.** *Soit* (A,μ_A) *une algèbre associative (sans unité). On peut construire une algèbre associative unitaire :* $A_+ := \mathbb{K}\oplus A$*, munie du produit :* $\mu_{A_+} : A_+\otimes A_+ \to A_+$

$$\left(A_+\otimes A_+ \cong \underbrace{\mathbb{K}\otimes\mathbb{K}}_{\cong\mathbb{K}} \oplus \underbrace{\mathbb{K}\otimes A}_{\cong A} \oplus \underbrace{A\otimes\mathbb{K}}_{\cong A} \oplus A\otimes A \text{ donc } "\mu_{A_+} = \mu_{\mathbb{K}}\oplus\mathrm{Id}_A\oplus\mathrm{Id}_A\oplus\mu_A" \right)$$

On dit qu'une algèbre associative unitaire $(A,\mu_A,\eta : \mathbb{K}\to A$*est* ***augmentée*** *lorsque :* $\exists\epsilon : A\to\mathbb{K}$ *une augmentation telle que :*

- ϵ *est un morphisme d'algèbre* $(\epsilon(\mu_A(a\otimes b)) = \mu_{\mathbb{K}}(\epsilon(a)\otimes\epsilon(b)))$
- $\epsilon\circ\eta = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$

1.1.3 Catégories

Définition 1.1.8. *Une* ***catégorie*** $\mathcal{C}$ *est la donnée d'une collection d'objets* C *de* $\mathcal{C}$ *et d'un ensemble de flèches (morphismes)* $f : C \to C'$, *où* C *et* C' *sont des objets de* $\mathcal{C}$

Remarque : Lorsque la collection d'objets est un ensemble, on parle de petite catégorie.

On note : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ l'ensemble des flèches $C \to C'$.
Pour tout objet C de $\mathcal{C}$, on a :
- $\mathrm{Id}_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$ (identité)
- $\forall f : C \to C', g : C' \to C'', \exists g \circ f : C \to C''$ telle que :

  $\mathrm{Id}_C \circ f = f \circ \mathrm{Id}_C = f$ (unité)

  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (associativité)

Exemples :
- Ens :

  objets = {Ensembles}

  morph = {Applications ensemblistes}
- Algèbres associatives :

  objets = {Algèbres associatives}

  morph = {Morphismes d'algèbres associatives}
- Algèbres associatives unitaires
- Algèbres commutatives
- Algèbres de Lie
- Bimod :

  objets = {Algèbres associatives}

  morph = {Bimodules}

  Soient A, B, C des algèbres associatives
  Soit M un $A - B$-bimodule
  Soit N un $B - C$-bimodule
  Alors $M \otimes_B N$ est un $A - C$-bimodule (i.e : $m \cdot b \otimes n = m \otimes n \cdot b$)
- Top :

  objets = {Espaces topologiques}

  morph = {Applications continues}
- Grp :

  objets = {Groupes}

  morph = {Morphismes de groupes}
- Op :

  objets = {Opérades}

  morph = {Morphismes d'opérades}
- Variétés différentiables :

  objets = {Variétés différentiables}

  morph = {Applications différentiables}
- Vect :

objets = {$\mathbb{K}$-Espaces vectoriels}

morph = {Applications $\mathbb{K}$-linéaires}

Définition 1.1.9. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories.*
On appelle ***foncteur covariant*** *entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ les données suivantes :*

- *$\forall C$ objet de $\mathcal{C}$, $F(C)$ objet de $\mathcal{C}'$*
- *$\forall f : C \to C'$, $F(f) : F(C) \to F(C')$ telle que :*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$
$$F(\mathrm{Id}_C) = \mathrm{Id}_{F(C)}$$

Définition 1.1.10. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories.*
On appelle ***foncteur contravariant*** *entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ les données suivantes :*

- *$\forall C$ objet de $\mathcal{C}$, $F(C)$ objet de $\mathcal{C}'$*
- *$\forall f : C \to C'$, $F(f) : F(C) \to F(C')$ telle que :*

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$
$$F(\mathrm{Id}_C) = \mathrm{Id}_{F(C)}$$

Exemple :

$$(-)^* : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} & \to & \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \\ V & \mapsto & V^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}} \\ f : V \to W & \mapsto & f^* : \begin{array}{ccl} W^* & \to & V^* \\ (\delta : W \to \mathbb{K}) & \mapsto & f^*(\delta) = \delta \circ f : V \to \mathbb{K} \end{array} \end{array} \right.$$

Soient $f : V \to W$, $g : W \to Z$

$$(g \circ f)^*(\delta) = \delta \circ (g \circ f) = (\delta \circ g) \circ f = f^*(\delta \circ g) = f^*(g^*(\delta)) = f^* \circ g^*(\delta)$$

C'est un foncteur contravariant.

Exemple : Foncteur oubli

$$U : \left\{ \begin{array}{ccl} \text{Alg.assoc.unitaire} & \to & \mathrm{Vect} \\ (A, \mu_A) & \mapsto & A \text{ (espace vectoriel sous-jacent)} \\ f : (A, \mu_A) \to (B, \mu_B) & \mapsto & f : A \to B \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(A, B) \end{array} \right.$$

De plus, on a un foncteur libre :

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathrm{Vect} & \to & \text{Alg.assoc.unitaire} \\ V & \mapsto & \mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} \text{ (algèbre tensorielle libre sur V)} \\ f : V \to W & \mapsto & \mathcal{F}(f) : \begin{array}{ccl} \mathcal{T}(V) & \to & \mathcal{T}(V) \\ v_1 \otimes ... \otimes v_n & \mapsto & f(v_1) \otimes ... \otimes f(v_n) \end{array} \end{array} \right.$$

Remarque : le produit dans $\mathcal{T}(\ )$ est le produit tensoriel. On a donc bien :

$$F(f)(a \cdot_{\mathcal{T}(V)} b) = F(f)(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) = f(a) \cdot_{\mathcal{T}(W)} f(b) = F(f)(a) \cdot_{\mathcal{T}(W)} F(f)(b)$$

Remarque : On peut montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, U(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg.ass.}}(\mathcal{T}(v), A)$

Démonstration. Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, U(A)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg.ass.}}(\mathcal{T}(V), A) \\ f : V \to U(A) & \mapsto & \phi(f) : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{T}(V) & \to & (A, \cdot) \\ v_1 \otimes ... \otimes v_n & \mapsto & f(v_1) \otimes ... \otimes f(v_n) \end{array} \right. \end{array} \right.$

(produit associatif)

Injectivité :
Soit $f \in \ker(\phi)$: $\forall v \in V, f(v) = \phi(f(v)) = 0$. Donc $f = 0$.
Surjectivité :
Soit $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg.ass.}}(\mathcal{T}(v), A)$
Soit $f : \begin{array}{ccc} V & \to & U(A) \\ v & \mapsto & \psi(v) \end{array}$.
f est bien défini et comme ψ est un morphisme d'algèbre, f est linéaire donc un morphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour $v_1, ..., v_n \in V$:

$$\begin{aligned} \phi(f)(v_1 \otimes ... \otimes v_n) &= f(v_1) \cdot_A ... \cdot_A f(v_n) \\ &= \psi(v_1) \cdot_A ... \cdot_A \psi(v_n) \\ &= \psi(v_1 \otimes ... \otimes v_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $\phi(f) = \psi$ sur un générateur de $\mathcal{T}(V)$, donc $\phi(f) = \psi$.
On a montré :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, U(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg.ass.}}(\mathcal{T}(v), A)$$

$\square$

1.2 Opérade algébrique non-symétrique

Soit (A, μ_A) une algèbre associative.
$\mu_A : A \otimes A \to A$ linéaire telle que (associativité)

$$\mu_A(-, \mu_A(-,-)) = \mu_A(\mu_A(-,-),-) : A \otimes A \otimes A \to A \text{ soit nulle.}$$

Cela correspond à la donnée de :

$$\curlyvee \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(A^{\otimes_2}, A)$$

Ou encore :

$$\underbrace{\mathcal{T}(\mathbb{K}\curlyvee)}_{\text{objetlibre}} \to \mathrm{Hom}(A^{\otimes_2}, A)$$

L'associativité devient alors :

$$\curlyvee - \curlyvee \mapsto 0 \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes_3}, A)$$

On travaille avec les collections d'espaces vectoriels indicés pas $\mathbb{N}$:

$$M = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, M_n \text{ est un espace vectoriel.}$$

Sur l'ensemble des collections, on défini un produit ("pléthysme") $\circ$ par :

$$(M \circ N)_n = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{i_1 + ... i_k = n} M_k \otimes N_{i_1} \otimes ... \otimes N_{i_k}$$

Remarque : $\circ$ est linéaire à gauche mais pas à droite.

Définition 1.2.1. *Une opérade $(\mathcal{P}, \gamma_{\mathcal{P}}, \eta_{\mathcal{P}})$ est la donnée de :*
une collection d'espace vectoriels $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
une application de collections $\gamma_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
une application de collections $\eta_{\mathcal{P}} : I \to \mathcal{P}$ où $I = (0, \mathbb{K}, 0, 0, ...)$

telles que :

- $\gamma_{\mathcal{P}}$ *est associatif*
- $\eta_{\mathcal{P}}$ *est une unité pour* $\gamma_{\mathcal{P}}$

C'est-à-dire que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}\circ(\mathcal{P}\circ\mathcal{P}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}\circ\gamma_{\mathcal{P}}"'] & (\mathcal{P}\circ\mathcal{P})\circ\mathcal{P} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{P}}\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P}\circ\mathcal{P} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}}"] \\
\mathcal{P}\circ\mathcal{P} \arrow[rr] & & \mathcal{P}
\end{tikzcd} \quad \textit{(associativité)}$$

$$\begin{tikzcd}
I\circ\mathcal{P} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{P}}\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathcal{P}\circ\mathcal{P} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}}"] & \mathcal{P}\circ I \arrow[l, "\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}\circ\eta_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& \mathcal{P} &
\end{tikzcd} \quad \textit{(unité)}$$

c'est-à-dire :

Remarques :

- Une application de collections $f : M \to N$ est une collection d'applications linéaires $f_n : M_n \to N_n$
- Si $\mu_k \otimes \nu_{i_1} \otimes ... \otimes \nu_{i_k} \in M_k \otimes N_{i_1} \otimes ... \otimes N_{i_k}$, $f : M \to N$ et $g : M' \to N'$ On définit $f \circ g : M \circ N \to M' \circ N'$ par :

$$(f \circ g)(mu_k \otimes \nu_{i_1} \otimes ... \otimes \nu_{i_k}) = f_k(mu_k) \otimes g_{i_1}(\nu_{i_1}) \otimes ... \otimes g_{i_k}(\nu_{i_k})$$

Exemple : Soit V un espace vectoriel.

$$\mathrm{End}_V := \left(\left\{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}\left(V^{\otimes_n}, V\right)\right\}_{n\geq 0}, \gamma_{\mathrm{End}_V}, \eta_{\mathrm{End}_V}\right)$$

où

$$\gamma_{\mathrm{End}_V}\left(\underbrace{f_k \otimes g_{i_1} \otimes ... \otimes g_{i_k}}_{\in \mathrm{End}_V \circ \mathrm{End}_V}\right) := f_k(g_{i_1} \otimes ... \otimes g_{i_k}) : V^{\otimes i_1 + ... + i_k} \to V$$

$$\eta_{\mathrm{End}_V} : \begin{array}{ccc} I = (0, \mathbb{K}, 0, ...) & \to & \mathrm{End}_V \\ (0,1,0,...) & \mapsto & (0, \mathrm{Id}_V, 0, ...) \end{array}$$

est une opérade.

Exemple : Soit (A, μ_A) une algèbre associative unitaire.
On considère $\underline{A} = ((0, A, 0, 0...), \gamma_{\underline{A}}, \eta_{\underline{A}})$
Remarque :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, (\underline{A} \circ \underline{A})_n &= \bigoplus_{k\geq 0} \bigoplus_{i_1+...+i_k=n} \underline{A}_k \otimes \underline{A}_{i_1} \otimes ... \otimes \underline{A}_{i_k} \\
&= \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_n \\
&= \begin{cases} \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_1 = A \otimes A & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\underline{A} \circ \underline{A} = (0, A \otimes A, 0, 0...) = \underline{A \otimes A}$
Il suffit donc de définir $\gamma_{\underline{A}}$ et$\eta_{\underline{A}}$ sur $A \otimes A$:

$$\gamma_{\underline{A}} : a \otimes b \mapsto \mu_A(a, b)$$

$\underline{A}$ est une opérade.

Définition 1.2.2. *Un* ***morphisme d'opérade*** $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ *est un morphisme de collections tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[r, "f \circ f"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{Q} \circ \mathcal{Q} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{Q}}"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"] & \mathcal{Q} \end{tikzcd}$$

Définition 1.2.3 ($\mathcal{P}$-algèbre (1))**.** *Soit* $(\mathcal{P}, \gamma_{\mathcal{P}})$ *une opérade.*
Une $\mathcal{P}$***-algèbre*** (A, γ_A) *est la donnée d'un espace vectoriel* A *et d'un morphisme d'opérades* $\gamma_A : \mathcal{P}(A) \to \mathrm{End}_A$

Remarque : On note, pour A espace vectoriel : $\mathcal{P}(A) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}_n \otimes A^{\otimes n}$

Définition 1.2.4 ($\mathcal{P}$-algèbre (2))**.** *Soit* $(\mathcal{P}, \gamma_{\mathcal{P}})$ *une opérade.*
Une $\mathcal{P}$***-algèbre*** $(A, \tilde{\gamma}_A)$ *est la donnée d'un espace vectoriel* A *et d'une application linéaire* $\tilde{\gamma}_A : \mathcal{P}(A) \to A$ *tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P} \circ \mathcal{P})(A) \cong \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}(\gamma_A)"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{P}(A) \arrow[d, "\gamma_A"] \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\gamma_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Exemple : Soit A une algèbre associative unitaire ; Soit $\underline{A}$ l'opérade associée.
Qu'est-ce qu'une $\underline{A}$-algèbre ?
On se donne un espace vectoriel V et une application linéaire $\tilde{\gamma}_V : \underline{A}(V) \to V$
D'abord, on remarque que $\underline{A}(V) = A \otimes V$
V est une $\underline{A}$-algèbre lorsque le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (A \otimes A) \otimes V \cong A \otimes (A \otimes V) \arrow[r, "\mathrm{Id}_A \otimes \tilde{\gamma}_V"] \arrow[d, "\mu_A \otimes \mathrm{Id}_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes V \arrow[d, "\tilde{\gamma}_V"] \\ A \otimes V \arrow[r, "\tilde{\gamma}_V"'] & V \end{tikzcd} \quad \text{i.e. } (a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$$

Ainsi, une $\underline{A}$-algèbre est un module sur l'algèbre A.

2 Homotopie

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. *Soient* X, Y *deux espaces topologiques.*
Soient $f, g : X \to Y$ *des fonctions continues.*
On dit que f *et* g *sont* ***homotopes*** *(noté* $f \sim g$*) lorsque :*

$$\exists h : X \times [0,1] \to Y \text{ continue, telle que } \left\{ \begin{array}{l} h(-,0) = f : X \to Y \\ h(-,1) = g : X \to Y \end{array} \right.$$

Proposition 2.1.1. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. – Réflexivité :
Soit $f : X \to Y$
Alors $f \sim f$ $\left(\text{on prend } h : \begin{array}{ccc} X \times [0,1] & \to & Y \\ (x,t) & \mapsto & f(x) \end{array} \right)$

- Symétrie :
  Soient $f, g : X \to Y$
  On suppose que $f \sim g$. On a alors :

$$\exists h : X \times [0,1] \to Y \text{ continue, telle que } \begin{cases} h(-,0) = f : X \to Y \\ h(-,1) = g : X \to Y \end{cases}$$

  Soit $\tilde{h} : \begin{array}{ccc} X \times [0,1] & \to & Y \\ (x,t) & \mapsto & h(x, 1-t) \end{array}$. Alors :

$$\begin{cases} \tilde{h}(-,0) = g : X \to Y \\ \tilde{h}(-,1) = f : X \to Y \end{cases}$$

  Donc $g \sim f$
- Transitivité :
  Soient $u, v, w : X \to Y$ telles que $u \sim v$ et $v \sim w$.
  $\exists h_1, h_2 : X \times [0,1] \to Y$ continues telles que

$$\begin{cases} h_1(-,0) = u : X \to Y \\ h_1(-,1) = v : X \to Y \end{cases} ; \begin{cases} h_2(-,0) = v : X \to Y \\ h_2(-,1) = w : X \to Y \end{cases}$$

  Soit $h : \begin{array}{ccc} X \times [0,1] & \to & Y \\ (x,t) & \mapsto & \begin{cases} h_1(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$
  Alors h est continue et montre que $u \sim w$

□

Définition 2.1.2. *Soient X, Y deux espaces topologiques.*
On dit que X et Y sont ***homotopes*** *lorsque :*

$$\begin{cases} \exists f : X \to Y \\ \exists g : X \to Y \end{cases} \text{continues, telles que : } \begin{cases} f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y \\ g \circ f \sim \mathrm{Id}_X \end{cases}$$

Exemple 1 : On peut montrer que le segment $[-1,1]$ est homotope au point $\{0\}$:

$$f : \begin{array}{ccc} \{0\} & \hookrightarrow & [-1,1] \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 0 & \leftarrow\!\shortmid & t \end{array} \quad : g$$

On a : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\{0\}}$. A fortiori, $g \circ f \sim \mathrm{Id}_{\{0\}}$

De plus, $\forall t \in [-1,1], f \circ g(t) = 0$
Soit $h : \begin{array}{ccc} [-1,1] \times [0,1] & \to & [-1,1] \\ (t,s) & \mapsto & t \times s \end{array}$.
Alors, $h(-,0) = f \circ g(t)$ et $h(-,1) = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$. Donc $f \circ g \sim \mathrm{Id}_{[-1,1]}$

Exemple 2 : On montre de la même façon que le cercle et le cylindre sont homotopes :

$$f : \begin{array}{ccc} S^1 \times \{0\} & \hookrightarrow & S^1 \times [-1,1] \\ (e^{i\theta}, 0) & \mapsto & (e^{i\theta}, 0) \\ (e^{i\theta}, 0) & \leftarrow\!\shortmid & (e^{i\theta}, t) \end{array} \quad : g$$

On vient de montrer que $[-1,1]$ est homotope au point $\{0\}$. Or on peut munir $\{0\}$ d'une structure de groupe (le neutre de la loi interne étant 0). On peut alors se demander

si la relation d'homotopie permet de transférer la structure de groupe au segment $[-1,1]$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une loi de composition interne $*$ sur $[-1,1]$, continue, qui munisse $[-1,1]$ d'une structure de groupe de neutre 0.
On a par exemple : $0 * 1 = 1$ et $\exists ! t \in [-1,1], t * 1 = 1 * t = 0$.
On considère la fonction

$$\tau_t : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & t * x \end{array}$$

Comme $*$ est continue, τ_t est continue. Par unicité de l'inverse, τ_t s'annule uniquement en 1. Par théorème des valeurs intermédiaires, τ_t est de signe constant sur $[-1,1]$.
Mais, $\tau_t(1 * (-1)) = t * (1 * (-1)) = (t * 1) * (-1) = -1 < 0$ par associativité. De même, $\tau_t(1 * 1) = 1 > 0$.
On a donc une contradiction.
On ne peut pas transférer la structure de groupe $\{0\}$ à $[-1,1]$.
Toutefois, il est possible de modifier la structure pour "que ça marche".

2.2 Espaces associatifs à homotopie près

Définition 2.2.1. *Soit X un espace topologique muni d'une loi de composition interne $\cdot$. On dit que X est* ***associatif à homotopie près*** *lorsque :*

$$(- \cdot (- \cdot -)) \sim ((- \cdot -) \cdot -)$$

Proposition 2.2.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques homotopes. On suppose que $(X, \cdot)$ est un espace associatif.*
Alors, on peut munir Y d'une structure d'espace associatif à homotopie près.

Démonstration. Par définition :

$$\exists \left\{ \begin{array}{l} f : X \to Y \\ g : Y \to X \end{array} \right. \text{continues, telles que : } \left\{ \begin{array}{l} f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y \\ g \circ f \sim \mathrm{Id}_X \end{array} \right.$$

De plus, on a $\cdot : X \times X \to X$, associative : $- \cdot (- \cdot -) = (- \cdot -) \cdot -$ On pose : $\nu :$
$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \to & Y \\ (y_1, y_2) & \mapsto & f(g(y_1) \cdot g(y_2)) \end{array}$
Montrons que $\nu(-, \nu(-,-)) \sim \nu(\nu(-,-),-) : Y^3 \to Y$:
Comme $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X, \exists h : X \times [0,1] \to X$ telle que : $\left\{ \begin{array}{l} h(-,0) = g \circ f \\ h(-,1) = \mathrm{Id}_X \end{array} \right.$ On pose :

$$\tilde{h} : \begin{array}{ccc} Y^3 \times [0,1] & \to & Y \\ (y_1, y_2, y_3, t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(g(y_1) \cdot h(g(y_2) \cdot g(y_3), t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(h(g(y_1) \cdot g(y_2), 2 - 2t) \cdot g(y_3)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

h montre que ν est associative à homotopie près (h est continue parce que μ est associative).

□

Exemple : l'espace des lacets

Soit X un espace topologie ; Soit $x_0 \in X$.
On considère l'espace des lacets $\Omega(X, x_0) = \{\gamma : [0,1] \to X \text{ continue }, \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$.

On muni cette espace d'une loi de composition interne :

$$\begin{array}{rcl} * : \quad \Omega(X,x_0)\times\Omega(X,x_0) & \to & \Omega(X,x_0) \\ (\gamma_1,\gamma_2) & \mapsto & \gamma_1 * \gamma_2 : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & X \\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array}\right. \end{array} \end{array}$$

<u>Remarque :</u> On peut représenter un lacet γ par : $|\overset{\gamma}{\longrightarrow}|$. On écrit alors :

$$\gamma_1 * \gamma_2 = |\overset{\gamma_1}{\longrightarrow}|\overset{\gamma_2}{\longrightarrow}|$$

Soient $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \in \Omega(X,x_0)$.

$$\forall t \in [0,1], \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) = \left\{\begin{array}{ll} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{array}\right. = |\overset{\gamma_1}{\longrightarrow\!\!\!\longrightarrow}|\overset{\gamma_2}{\longrightarrow}|\overset{\gamma_3}{\longrightarrow}|$$

$$\forall t \in [0,1], (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 = \left\{\begin{array}{ll} \gamma_1(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array}\right. = |\overset{\gamma_1}{\longrightarrow}|\overset{\gamma_2}{\longrightarrow}|\overset{\gamma_3}{\longrightarrow\!\!\!\longrightarrow}|$$

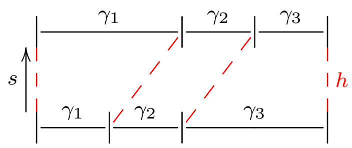
Il est clair que $*$ n'est pas associatif. Toutefois, on peut montrer que

$$(- * -) * - \sim - * (- * -)$$

en prenant :

$$\begin{array}{rcl} h : \quad \Omega(X,x_0)^3 \times [0,1] & \to & \Omega(X,x_0) \\ (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,s) & \mapsto & \gamma_s : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & X \\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} \gamma_1(\frac{4t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \gamma_2(4t-(1+s)) & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma_3(\frac{4t-2-s}{2-s}) & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{array}\right. \end{array} \end{array}$$

On a alors : $h(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,0) = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ et $h(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,1) = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$
Graphiquement :

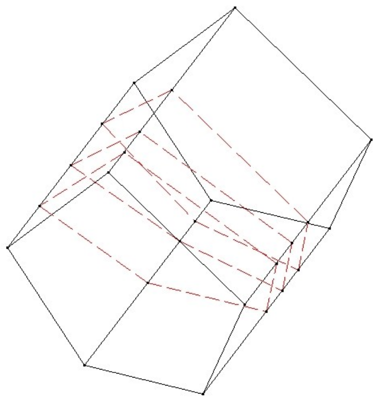


Remarque : On notera $H(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = \begin{array}{rcl} H : \quad [0,1]\times[0,1] & \to & X \\ (s,t) & \mapsto & \gamma_s(t) = h(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,s)(t) \end{array}$

Pour le produit de quatre éléments, il y a 5 combinaisons possibles. On obtient :

$$\begin{tikzcd} & & ((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3) * \gamma_4 \arrow[dll, "H(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)*\gamma_4"'] \arrow[drr, "H(\gamma_1*\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)"] & & \\ (\gamma_1 * \gamma_2) * (\gamma_3 * \gamma_4) \arrow[dr, "H(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3*\gamma_4)"'] & & & & (\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)) * \gamma_4 \arrow[dl, "H(\gamma_1,\gamma_2*\gamma_3,\gamma_4)"] \\ & \gamma_1 * (\gamma_2 * (\gamma_3 * \gamma_4)) & & \gamma_1 * ((\gamma_2) * \gamma_3) * \gamma_4) \arrow[ll, "\gamma_1 * H(\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)"] & \end{tikzcd}$$

Ou encore, en visualisant les relations d'homotopie :

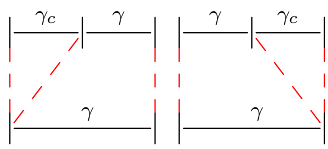


On peut maintenant chercher une unité homotopique. On considère le lacet constant :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_c : & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & x_0 \end{array}$$

Alors, on montre facilement que :

$$\forall \gamma \in \Omega(X, x_0), \gamma * \gamma_c \sim \gamma_c * \gamma \sim \gamma :$$



Définition 2.2.2. *Le **groupe fondamental** de X en x_0 est :*

$$\Pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/\sim$$

Démonstration. C'est bien un groupe :
On a montré l'associativité et la présence d'un neutre.
Soit $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, on considère $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(1-t)$.

$$\text{Soit } h : \begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ (t,s) & \mapsto & \begin{cases} \gamma(2ts) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2ts - 2s + 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

On a alors $\begin{cases} h(-,0) = \gamma_c \\ h(-,1) = \gamma * \tilde{\gamma} \end{cases}$ i.e $\overline{\gamma} * \overline{\tilde{\gamma}} = \overline{\tilde{\gamma}} * \overline{\gamma} = \overline{\gamma_c}$ □

Exemple :

$$\Pi_1\left(\mathbb{R}^2\ (0,0)\right) = \mathbb{Z}$$

(on compte le nombre de tours autour de 0 dans un sens ou dans l'autre)

2.3 Groupe à homotopie près

Définition 2.3.1. *Soit X un ensemble*
*X est un **groupe à homotopie près** lorsque :*

- *X est associatif à homotopie près*
- *$\exists e \in X$ tel que $- \cdot e \sim e \cdot - \sim \mathrm{Id}_X$*
- *$\forall x \in X, \exists y \in X$ tel que : $x \cdot y \sim y \cdot x \sim e$*
  (où $\forall a, b \in X, a \sim b$ lorsque $\exists h : [0,1] \to X, h(0) = a, h(1) = b$)

Exemple :
On peut munir $[-1,1]$ d'une structure de groupe à homotopie près, de neutre 0 :
Soit $\begin{array}{rccc} * : & [-1,1]\times[-1,1] & \to & [-1,1] \\ & (t,t') & \mapsto & tt' \end{array}$
Alors :
- $*$ est une loi de composition interne sur $[-1,1]$.
- $*$ est associative
- Soit $\begin{array}{rccc} h : & [-1,1]\times[0,1] & \to & [-1,1] \\ & (t,s) & \mapsto & t*s \end{array}$

  Alors $h(-,0) = -*0 = 0*-$ et $h(-,1) = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$ Ainsi $-*0 \sim 0*- \sim \mathrm{Id}_{[-1,1]}$
  0 est donc neutre pour $*$
- Soit $t \in [-1,1]$

  $t*0 = 0*t = t$ or $t \sim 0$ (on prend $\begin{array}{rccc} h : & [0,1] & \to & [-1,1] \\ & s & \mapsto & t*s \end{array}$)

3 Opérades topologiques

3.1 Définitions

3.1.1 Opérades topologiques

La catégorie sous-jacente est maintenant celle des espaces topologiques.

Définition 3.1.1. *Une **opérade** $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_n\}$ est une collection d'espaces topologiques munis d'applications continues associatives :*

$$\gamma_{i_1,\ldots,i_k}\mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_{i_1} \times \ldots \times \mathcal{P}_{i_k} \to \mathcal{P}_{i_1+\ldots+i_k}$$

i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_n : \bigsqcup_{k\geq 0}\bigsqcup_{i_1+\ldots+i_k=n} \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_{i_1} \times \ldots \times \mathcal{P}_{i_k} \to \mathcal{P}_n$$

et d'une unité : $\eta : I = (\emptyset, *, \emptyset, \ldots) \to \mathcal{P}$

Définition 3.1.2. *Soit $(\mathcal{P}, \gamma_{\mathcal{P}})$ une opérade.*
*Un **$\mathcal{P}$-espace** (X,γ) est la donnée d'un espace topologique X et d'un morphisme d'opérades $\gamma : \mathcal{P} \to \mathrm{End}_X$*

3.1.2 Polytopes de Stasheff

Soit $I = [0,1]$

Définition 3.1.3. *Les **polytopes de Stasheff** sont les $K_i, \forall i \geq 2$ tels que :*

1. *$\forall i \geq 2, K_i \subset I^{i-2}$*
2. *$\forall (t_1, \ldots t_{i-2}) \in I^{i-2}, (t_1, \ldots, t_{i-2}) \in K_i$ lorsque :*

$$\forall 1 \geq j \geq i-2, 2^j t_1 \ldots t_j \leq 1$$

Définition 3.1.4. *$\forall i \geq 2$, on note L_i la frontière de K^i.*

Les polytopes peuvent être décrits de manière plus intuitive : si on considère un mot $x_1...x_i$, on peut montrer que chaque manière sensée d'insérer un jeu de parenthèses dans le mot correspond à une cellule de L_i, frontière de K_i.

On peut dessiner K_i en petites dimensions :

$i = 2$

$$K_2 = 0$$

$i = 3$

$$K_3 = \{t \in [0,1] | 2t \geq 1\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$i = 4$

$$K_4 = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 | 2x \geq 1, 4xy \geq 1\right\}$$

(cf Annexe 1)

3.2 *Ass* et *uAss*

Définition 3.2.1.

$$Ass = \{Ass_n\} \quad o\grave{u} \quad \begin{cases} Ass_0 = \emptyset \\ \forall n \geq 1, Ass_n = * \end{cases}$$

Proposition 3.2.1. *Un Ass-espace est exactement un espace topologique X muni d'une multiplication $\mu : X \times X \to X$ associative.*

Démonstration. Soit X un Ass-espace.
X est un espace topologique, et on a :

$$\gamma : Ass \to \mathrm{End}_X \text{ tel que } \begin{tikzcd} Ass \times Ass \arrow[r, "\gamma\times\gamma"] \arrow[d, "\gamma_{Ass}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{End}_X \times \mathrm{End}_X \arrow[d, "\gamma_{\mathrm{End}_X}"] \\ Ass \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{End}_X \end{tikzcd}$$

$\forall n \geq 1$, on note $\mu_n = \gamma(*_n)$.
On remarque que $\mu_1 = \mathrm{Id}_X$

$$\begin{tikzcd} Ass_2 \times Ass_1 \times Ass_2 \arrow[r, "\gamma\times\gamma"] \arrow[d, "\gamma_{Ass}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{End}_2 \times \mathrm{End}_1 \times \mathrm{End}_2 \arrow[d, "\gamma_{\mathrm{End}_X}"] \\ Ass_3 \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{End}_3 \end{tikzcd} \text{ donc } \begin{tikzcd} *_2 \times *_1 \times *_2 \arrow[r, "\gamma\times\gamma"] \arrow[d, "\gamma_{Ass}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mu_2 \times \mu_1 \times \mu_2 \arrow[d, "\gamma_{\mathrm{End}_X}"] \\ *_3 \arrow[r, "\gamma"'] & \mu_3 = \mu_2(-, \mu_2(-,-)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Ass_2 \times Ass_2 \times Ass_1 \arrow[r, "\gamma\times\gamma"] \arrow[d, "\gamma_{Ass}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{End}_2 \times \mathrm{End}_2 \times \mathrm{End}_1 \arrow[d, "\gamma_{\mathrm{End}_X}"] \\ Ass_3 \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{End}_3 \end{tikzcd} \text{ donc } \begin{tikzcd} *_2 \times *_2 \times *_1 \arrow[r, "\gamma\times\gamma"] \arrow[d, "\gamma_{Ass}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mu_2 \times \mu_2 \times \mu_1 \arrow[d, "\gamma_{\mathrm{End}_X}"] \\ *_3 \arrow[r, "\gamma"'] & \mu_3 = \mu_2(\mu_2(-,-), -) \end{tikzcd}$$

Le fait que les diagramme soit commutatifs justifie :

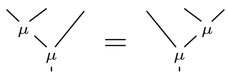
$$\mu_3 = \mu_2(\mu_2(-,-), -) \text{ et } \mu_3 = \mu_2(-, \mu_2(-,-))$$

On a donc :

$$\mu_2(\mu_2(-,-), -) = \mu_2(-, \mu_2(-,-))$$

i.e (X, μ_2) est un espace topologique associatif.

Pour la réciproque, il faut montrer que la donnée d'une multiplication associative sur X suffit pour construire un morphisme d'opérades $Ass \to \mathrm{End}_X$.
On le fait pour de petites arités :
On note $\mu =:$ 

Soit γ :
$$\begin{cases} Ass & \to & \mathrm{End}_X \\ \emptyset & \mapsto & \emptyset \\ *_1 & \mapsto & \mathrm{Id}_X \\ *_2 & \mapsto & \mu \end{cases}$$
$*_3 \quad \mapsto$ 

$*_4 \quad \mapsto$

...

γ est bien un morphisme d'opérade puisque μ est associative.

□

Définition 3.2.2.
$$uAss = \{uAss_n\} \;\; \textit{où}\; \forall n \in \mathbb{N}, Ass_n = *_n$$

Proposition 3.2.2. *Un $uAss$-espace est un espace topologique X muni d'une multiplication $\mu : X \times X \to X$ associative et d'une unité pour cette multiplication.*

Démonstration. Soit X un $uAss$-espace. X est un espace topologique et on a :

$$\gamma : Ass \to \mathrm{End}_X \text{ tel que } \begin{tikzcd} Ass \times Ass \arrow[r, "\gamma\times\gamma"] \arrow[d, "\gamma_{Ass}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{End}_X \times \mathrm{End}_X \arrow[d, "\gamma_{\mathrm{End}_X}"] \\ Ass \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{End}_X \end{tikzcd}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mu_n = \gamma(*_n)$.
Comme dans la démonstration précédente, on montre que (X, μ_2) est un espace topologique associatif.
De plus, $\gamma(*_0) = \mu_0 : \mathbb{K} \to X$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire. On note $1_X = \mu_0(1_{\mathbb{K}})$.
1_X est un neutre pour μ_2.

□

3.3 A_∞

Proposition 3.3.1. *Si $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme d'opérades topologiques ; et X est un $\mathcal{Q}$-espace, alors X est un $\mathcal{P}$-espace.*

Démonstration. Comme X est un $\mathcal{Q}$-espace, on a un morphisme d'opérades $\gamma : \mathcal{Q} \to \mathrm{End}_X$.
On a alors un morphisme d'opérades entre $\mathcal{P}$ et End_X :

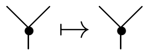
$$\mathcal{P} \xrightarrow{\phi} \mathcal{Q} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{End}_X$$

□

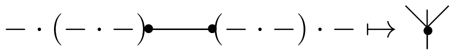
On cherche maintenant une opérade A_∞ qui pourrait coder l'espace des lacets. On peut essayer de chercher un morphisme d'opérade $A_\infty \to Ass$.
En arité 1 :

$$| \mapsto |$$

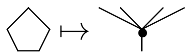
En arité 2 :



En arité 3 : A_∞ contient les produits $- \cdot (- \cdot -)$ et $(- \cdot -) \cdot -$. Or, pour avoir un morphisme, il faut que les deux éléments soient homotopes. Ces deux points sont en fait les extrémités d'un segment, on a :



En arité 4 : on obtient un pentagone plein :

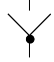


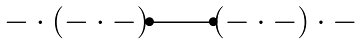
En fait, $\forall n \geq 2, A_\infty(n) = K_{n-2}$

Proposition 3.3.2. *Soit* (X, x_0) *un espace topologique pointé.*
Alors $\Omega(X, x_0)$ *est un* A_∞*-espace.*

Démonstration. On le montre pour de petites arités :
Soit

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & A_\infty & \to & \mathrm{End}_{\Omega(X,x_0)} \\ & | & \mapsto & \mathrm{Id} \end{array}$$

 $\mapsto$ μ (produit de deux lacets)

 $\mapsto$ $h : (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, s) \mapsto \gamma_s(t)$

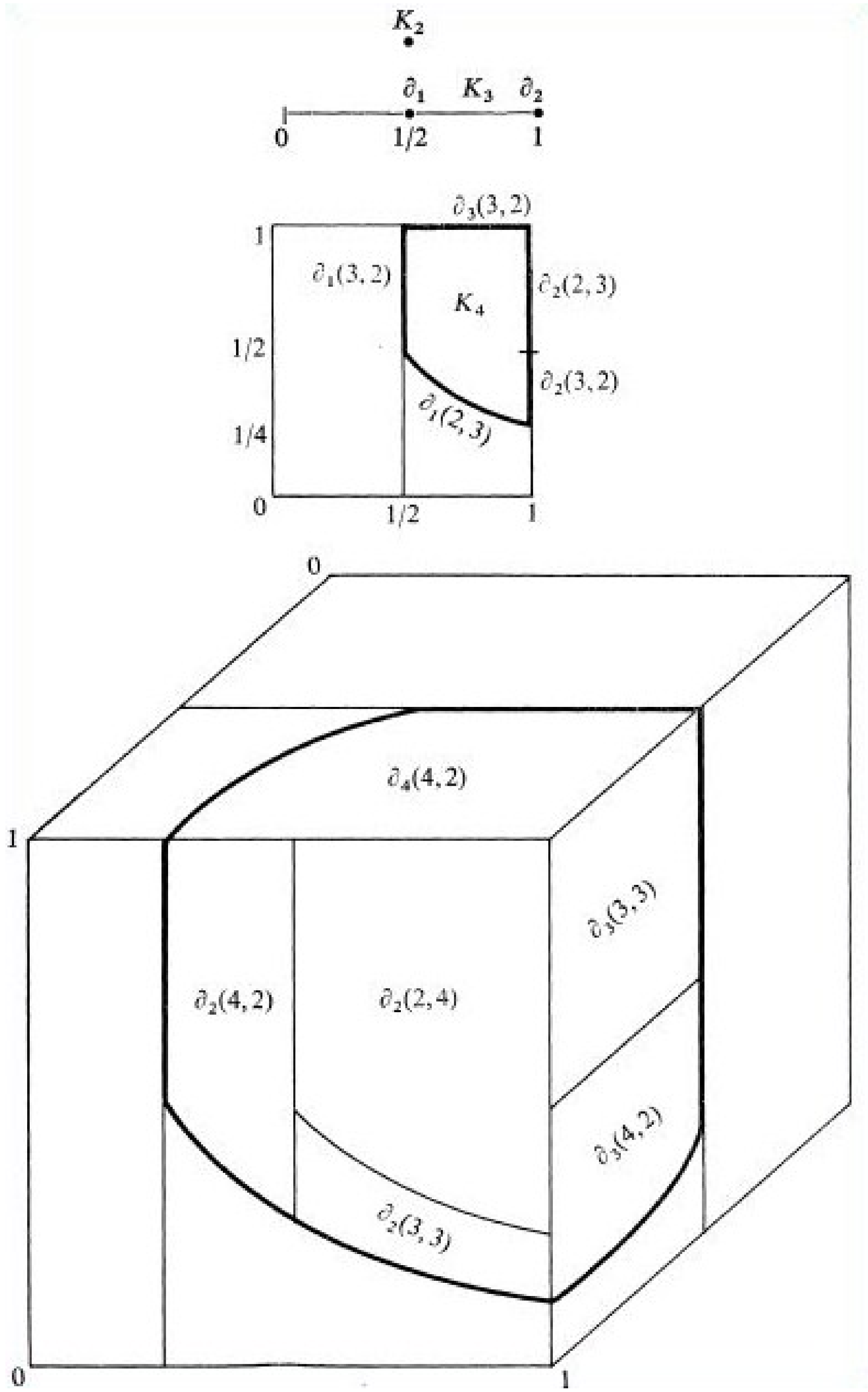
...

□

En fait, on pourrait même montrer que X est un A_∞-espace $\Leftrightarrow$ X a les mêmes groupes d'homotopie que $\Omega(Y)$, où Y est aussi un espace topologique.

Annexe 1

Polytopes de Stasheff K_2, K_3, K_4, K_5



Remerciements

Je remercie l'Institut de Mathématiques de Toulouse pour m'avoir accueillie pour mon stage. Je remercie également mon maître de stage, Joan Milles, maître de conférence en topologie algébrique et en algèbre homologique et homotopique, pour sa patience et sa disponibilité.

Références

1. James Dillon Stasheff, *Homotopie associativity of H-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 1963, n 108, 275-292
2. Jean-Louïs Loday, *La renaissance des opérades*, Séminaire BOURBAKI, 1994, n 792
3. Jean-Louïs Loday et Bruno Vallette, *Algebraic operads*, Springer, 2012, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 346.