Partitions d'un entier en parts fixées

Référence(s) :
– S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas - *Oraux X-ENS, analyse 2*

Théorème 1

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in N^*$, on pose

$$u_n = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k : \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n \right\}$$

Alors, on a :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Étape 1

Série génératrice des u_n

Les séries entières $\sum_{x_i \in \mathbb{N}} z^{x_i a_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, ont un rayon de convergence de 1. On considère leur produit de Cauchy : Pour $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i=0}^{\infty} z^{a_i x_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - z^{a_i}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n} 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \end{aligned}$$

Ainsi, f est la série génératrice de la suite $(u_n)_n$.

Étape 2

Décomposition en éléments simples

La fonction f est une fraction rationnelle. Ses pôles sont les racines $a_1, \dots, a_k$-èmes de l'unité. De plus,
– Le pôle 1 est de multiplicité k
– Soit $\omega \neq 1$ est un pôle de f. Supposons que ω est aussi de multiplicité k.
Alors, d'après Bézout, comme les a_i sont premiers entre eux dans leur ensemble, il existe $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sum_{i=1}^{k} b_i a_i = 1$. Ainsi

$$\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} b_i a_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{b_i} = 1$$

On a une contradiction. Donc le pôle ω est de multiplicité $< k$.

On pose $P = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de f, avec $\omega_1 = 1$. Alors, il existe des constantes $(c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant k-1}}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que, pour tout $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant k-1}} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j}$$

Étape 3

Développement en séries entières

Soit $\omega \in P$, soit $j \in \mathbb{N}$. Alors, la fraction $z \mapsto \frac{1}{(\omega - z)^j}$ est développable en série entière. En effet :

- $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\omega^{n+1}}$
- Puis, en dérivant $(j-1)$ fois terme à terme, on obtient : $\frac{(j-1)!}{(\omega-z)^j} = \sum\limits_{n=j-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-j+1)!}\frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$. D'où

$$\frac{1}{(\omega-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!}\frac{z^n}{\omega^{n+j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{\omega^{n+j}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} c_{ij} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{\omega^{n+j}} \right) \end{aligned}$$

Étape 4

Équivalent de u_n en $+\infty$

Ainsi, si on regarde le coefficient en z^n, d'après l'unicité du développement en séries entières :

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} c_{ij} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega^{n+j}}$$

Or, $binomn+k-1n = \frac{(n+k-1)\dots(n+1)}{(k-1)!} \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.
Et pour $j \leqslant k-1$, $\binom{n+j-1}{n} \sim \frac{n^{j-1}}{(j-1)!} = o\left(\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\right)$. Ainsi

$$u_n \sim_{+\infty} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Étape 5

Calcul de la constante α

On multiplie $f(z)$ par $(1-z)^k$ puis on évalue en $z=1$:

$$(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} = underseti=1 \prod \frac{1}{1+z+\cdots+z^{a_i-1}}$$

Ainsi $\alpha = \prod\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$

Finalement :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$