Formule sommatoire de Poisson

Référence(s) :
– X. Gourdon - *Analyse*

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi nx}$$

où pour $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}dt$ (transformée de Fourier)

Étape 1

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

D'après les hypothèses, il existe $M > 0$ tel que $\forall |x| \geqslant 1$ on ait $|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^2}$. Ainsi :

$$\forall K > 0, \forall x \in [-K, K], \forall n \in \mathbb{Z}, (|n| > K+1) \Rightarrow \left(|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{(x+n)^2} \leqslant \frac{M}{(|n|-K)^2} \right)$$

[1]

Ainsi, on a bien la convergence normale de la série sur tout compact. On note F la limite simple.

Étape 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$

Comme précédemment, on montre que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f'(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact. La série converge donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$, et on applique le théorème de dérivation des séries de fonctions :[2] On obtient que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$$

Étape 3

La fonction F est 1-périodique et on peut calculer ses coefficients de Fourier

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum\limits_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$. Donc, en faisant tendre $N \to +\infty$, on obtient $F(x+1) = F(x)$ et donc F est 1-périodique.

1. D'après l'inégalité triangulaire $|n| \leqslant |x+n| + |x| \leqslant |x+n| + K$
2. C'est en fait le théorème de dérivation des suites de fonctions, appliqué aux sommes partielles de la série.

Théorème 2 (*Dérivation des suites de fonctions*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'un segment $[a, b]$ dans un espace de Banach E. On suppose que :
- *$\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge*
- *La suite de fonction f'_n converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g.*

Alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f' = g$

On calcule ses coefficients de Fourier : Soit $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: [3]

$$\begin{aligned} c_N(F) &= \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi Nt}dt \underset{\text{(cvu)}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi Nt}dt \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)e^{-2i\pi Nt}e^{-2i\pi Nn}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)e^{-2i\pi Nt}dt \\ &= \hat{f}(N) \end{aligned}$$

Étape 4

Conclusion

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge uniformément vers F et on a le résultat :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

Corollaire 1

Pour tout $s > 0$: $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$

Étape 5

Calcul de l'intégrale de Gauss (par dérivation sous le signe intégral)

On note $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = 2I$ où $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$.

Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt \end{array} \right.$. On note $h : \left| \begin{array}{ccc} [0,\infty[\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \end{array} \right.$. On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral :

- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est mesurable et intégrable sur $[0,1]$.
- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est dérivable et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}$
- Pour tout $K > 0$, pour tout $x \in [0,K]$, pour tout $t \in [0,1]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2K$, fonction indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, la fonction g est dérivable sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}dt \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2}dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}du \text{ (avec le changement de variable } u = tx) \\ &= -2f(x)f'(x) \text{ (où } f : x \mapsto \int_0^x e^{-u^2}du) \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité, on obtient $g(x) - g(0) = -(f^2(x) - f^2(0))$ mais $g(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{4}$, donc

$$g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$$

Or, on a l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$$

3. On a le résultat suivant :

Théorème 3

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I segment de $\mathbb{R}$ dans E. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers S. Alors S est continue sur I et

$$\int_I S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_I f_n$$

Ainsi, $g(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $f^2(x) \longrightarrow \frac{\pi}{4}$. Comme f est positive, on obtient : $I = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Finalement :

$$I_0 = \sqrt{\pi}$$

Étape 6

Soit $\alpha > 0$; Soit $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$.

D'abord, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi n t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi n \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du \qquad \text{en posant } u = \sqrt{\alpha} t\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $I(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$. ($\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I(n)$)

Étape 7

Calcul de $I(x)$: on cherche une équation différentielle vérifiée par I.

On pose $g : (x,u) \mapsto e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$. On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto g(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est intégrable ($\left| e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \right| \leqslant e^{-u^2} \in L^1$ (intégrale de Gauss))
- Pour tous x, u : $\frac{\partial g}{\partial x}(x,u) = e^{-u^2} \left(-2i\pi \frac{u}{\sqrt{\alpha}} \right) e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$
- La fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue et $\forall x, u \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,u) \right| \leqslant \frac{2\pi u}{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} \in L^1$

Ainsi, la fonction I est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I'(x) = \frac{-2i\pi}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du$

Maintenant, on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}I(x) &= \left[e^{-u^2} \frac{-\sqrt{\alpha}}{2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -2u e^{-u^2} \frac{-\sqrt{\alpha}}{2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du \\ &= 0 - \frac{\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du \\ &== -\frac{\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \frac{\sqrt{\alpha}}{-2i\pi x} I'(x) = -\frac{\alpha}{2\pi^2 x}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $I(x) = I(0) e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$ (par calcul de l'intégrale de Gauss)

Ainsi, pour tout n, $\hat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$. On applique la formule de Poisson en 0 :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$$

On pose alors $s = \frac{\pi}{\alpha}$ et on obtient : $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$

Complément : Calcul de l'intégrale de Gauss