Densité des polynômes orthogonaux

Référence(s) :
– V. Beck, J. Malick et G. Peyré - *Objectif agrégation*

Rappels

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **fonction poids** une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x) dx$$

C'est un espace de Hilbert, qui contient les polynômes.

Il existe une unique[1] famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux tels que pour tout n, $\deg P_n = n$. On l'appelle famille des **polynômes orthogonaux associée à la fonction poids** ρ. Elle s'obtient en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; soit ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x) < +\infty$$

Alors, la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Étape 1

Reformulation du problème.

On sait déjà que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale[2]. Il faut donc montrer qu'elle est totale, c'est-à-dire que $\overline{\mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})} = L^2(I, \rho)$, i.e. $\mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$.
Or, par construction, on a : $\mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathrm{Vect}((X^n)_{n\in\mathbb{N}})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g_n : x \mapsto x^n$.
Pour montrer le théorème, il faut montrer que :

$$\forall f \in L^2(I, \rho), \forall n \in \mathbb{N}, (\langle f, g^n \rangle_\rho = 0) \Rightarrow (f = 0)$$

Ainsi, on se donne $f \in L^2(I, \rho)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n \rangle_\rho = 0$.

Étape 2

Soit $\varphi = f\varphi 1_I$. Alors, la fonction φ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}_+, t \leqslant \frac{1+t^2}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$|f(x)|\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 + [f(x)|^2)\rho(x)$$

1. Pourquoi est-ce qu'elle est unique ?
2. Pourquoi donc ?

Et comme ρ et ρf^2 sont dans $L^1(I)$, on obtient :

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R})$$

Étape 3

On peut donc considérer sa transformée de Fourier $\hat{\varphi} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \int_I f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)dx$. Alors, la fonction $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |Im(z)| < \frac{a}{2}\}$.

On pose, pour $g : (z, x) \in B_a \times \mathbb{R} \mapsto e^{-izx} f(x)\rho(x)$.
D'abord, pour $z \in B_a$, on remarque que :

$$\begin{aligned}\int_I g(z,x)|g(z,x)|dx &\leqslant \int_I e^{a\frac{|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)dx \\ &\leqslant \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $F : \left| \begin{array}{ccc} B_a & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \int_I g(z,x)dx \end{array} \right.$ est bien définie.
On veut appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral :

- Pour tout $z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable
- Pour presque tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est une fonction holomorphe
- Pour tout $z \in B_a$, $|g(z,x)| \leqslant e^{a\frac{|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)$ qui est une fonction de x indépendante de z et intégrable sur $\mathbb{R}$ (voir plus haut).

Ainsi, la fonction F est holomorphe sur B_a et coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$.

Étape 4

Calcul des dérivées et conclusion

Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale permet aussi de calculer les dérivées successives de la fonction F :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B_a, F^(n)(z) = \int_I (-ix)^n e^{-izx} f(x)\rho(x)dx$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F^(n)(0) = (-i)^n \langle f, g_n\rangle_\rho = 0 \text{ par hypothèse}$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, la fonction F est nulle sur un voisinage de 0 ; et par théorème des zéros isolés, F est nulle sur B_a.
En particulier, la fonction φ est nulle sur $\mathbb{R}$ et comme ρ est strictement positive :

$$f \equiv 0 \text{ presque partout, i.e. } f = 0 \text{ dans } L^2(I, \rho)$$

Contre-exemple

On prend $I = \mathbb{R}_+^*$, et $w : x \in I \mapsto x^{-\ln x}$ une fonction poids sur I.
En fait, w ne vérifie pas l'hypothèse d'écrasement. On va montrer que les polynômes orthogonaux pour w ne forment pas une base hilbertienne.
On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2\pi \ln(x)) \end{array} \right.$; et on prend $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle f, g_n\rangle_w &= \int_I x^n \sin(2\pi \ln x) x^{-lnx} dx \\ &= \int_\mathbb{R} e^{yn} \sin(2\pi y)(e^y)^{-y} e^y dy \quad \text{on a posé } y = \ln x \\ &= \int_R e^{y(n+1)-y^2} \sin(2\pi y)dy \quad \text{or } y(n+1) - y^2 = -\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{(n+1)^2}{4} \text{ d'où} \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_R e^{-\left(y-\frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi y)dy \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_R e^{-t^2} \sin(2\pi t + (n+1)\pi t)dt \quad \text{en posant } t = y - \frac{n+1}{2} \\ &= (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_R e^{-t^2} \sin(2\pi t)dt \\ &= 0 \text{ intégrale d'une fonction impaire intégrable}\end{aligned}$$