Théorème de Riesz-Fischer

Manon Ruffini

Théorème 1 (*Riesz-Fischer*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$; soit $p \in [1, \infty]$.
Alors : $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Preuve : Pour montrer qu'un espace E est un espace de Banach, on prend une suite de Cauchy à valeurs dans E et on montre qu'elle converge.

- Cas 1 : $p = \infty$

  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$.

  $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, \|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k}$$

  C'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists E_k$ négligeable tel que :

  $$\forall m, n \geqslant N_k, \forall x \notin E_k, |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

  Soit $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k$. L'ensemble E est négligeable (union dénombrables d'ensembles négligeables) et :

  $$\forall x \notin E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \tag{1}$$

  Ainsi, $\forall x \notin E$, $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet. Soit $f(x)$ sa limite. La fonction f est donc définie presque partout.

  Montrons que $f \in L^\infty(\Omega)$ et $f_n \longrightarrow f$ dans L^∞.

  Par passage à la limite dans (1), on obtient :

  $$\forall x \notin E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k, |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

  Avec $k = 1$: $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \|f\|_{L^\infty} \leqslant 1 + \|f_{N_1}\|_{L^\infty}$. Donc : $f \in L^\infty$. (On a maintenant le droit de considérer $\|f - f_n\|_{L^\infty}$)
  Alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k, \|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$, i.e. $f_n \longrightarrow f$ dans L^∞

  Donc L^∞ est un espace de Banach.

- Cas 2 : $1 \leqslant p < \infty$

  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de L^p.

  On va montrer que (f_n) admet une sous-suite $(f_{n_k})_k$ convergente dans L^p, vers une limite f. Alors on aura :
  Soit $\varepsilon > 0$:
  - $\exists K_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant K_0, \|f_{n_k} - f\|_{L^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
  - $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_0, \|f_m - f_n\|_{L^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

  Alors : $\forall n \geqslant N_0, \|f - f_n\|_{L^p} \leqslant \varepsilon$, d'où la convergence de $(f_n)_n$

  De $(f_n)_n$ on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que :

  $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

  En effet, comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe $(n_k)_k$ suite croissante d'entiers telle que :

  $$\forall m, n \geqslant n_k, \|f_m - f_n\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

  On notera $\hat{f}_k$ au lieu de f_{n_k}.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k|$$

Alors : $(g_n)_n$ est une suite croissante de fonctions de L^p (car sommes de fonctions L^p), et

$$\|g_n\|_{L^p} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right\|_{L^p} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 1$$

Donc, par théorème de convergence monotone, pour presque tout $x \in L^p$, $g_n(x)$ converge vers une limite finie notée $g(x)$. La fonction g est définie presque partout, et :

$$\|g\|_{L^p}^p = \int_X |g(x)|^p dx = \int_X \liminf |g_n(x)|^p dx \underset{Fatou}{\leqslant} \liminf \int_X |g_n(x)|_{L^p}^p dx \leqslant 1$$

Donc $g \in L^p$.
Soit $N \subset \Omega$ négligeable tel que : $\forall x \notin N, g_n(x) \to g(x)$. Soit $x \notin N$. On a :

$$\forall m > n \geqslant 1, |\hat{f}_m(x) - \hat{f}_n(x)| \leqslant |\hat{f}_m(x) - \hat{f}_{m-1}(x)| + ... + |\hat{f}_{n+1}(x) - \hat{f}_n(x)| \leqslant |g(x) - g_{n-1}(x)| \longrightarrow 0$$

Donc, $\forall x \notin N, (\hat{f}_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge. Soit $\hat{f}(x)$ sa limite.
On a : $\forall m > n \geqslant 1, |\hat{f}_m(x) - \hat{f}_n(x)| \leqslant g(x)$, donc, par passage à la limite :

$$\forall n \leqslant 1, \forall x \notin N, |\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)| \leqslant g(x)$$

En particulier : $\|f\|_{L^p} \leqslant \|g\|_{L^p} + \left\|\hat{f}_1\right\|_{L^p} < \infty$ donc

$$\hat{f} \in L^p(\Omega)$$

Enfin,
– $\forall x \notin N, |\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)|^p \leqslant (g(x) - g_{n-1}(x))^p \longrightarrow 0$
– $\forall x \notin N, |\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)|^p \leqslant (g(x))^p$ avec $g^p \in L^1$

Par théorème de convergence dominée :

$$\left\|\hat{f} - \hat{f}_n\right\|_{L^p} \longrightarrow 0$$