Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Application.

Manon Ruffini

Table des matières

Rapport du jury

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur le corps des complexes et sur les corps finis et il faut savoir les classifier. On ne doit pas oublier l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2+bxy+cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener). L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Cadre : Soit K un corps quelconque de caractéristique différente de 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

Plan

Dans toute la leçon, on se place dans un corps K de caractéristique différente de 2, et on considère un K-espace vectoriel E de dimension finie n.

1 Généralités

1.1 Formes bilinéaires

Définition 1 (*[dSP] p24-27*)

*Une **forme bilinéaire symétrique** sur E est une application $b : E \times E \to K$ telle que :*
- *Pour tout $y \in E$, l'application $b(\cdot, y) : x \to b(x,y)$ est linéaire,*
- *Pour tout $x \in E$, l'application $b(x, \cdot) : y \to b(x,y)$ est linéaire,*
- *Pour tout $(x,y) \in E^2$, $b(x,y) = b(y,x)$*

Exemple 1 (*[dSP] p 25*)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(K)$ une matrice symétrique.
L'application $(X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est une forme bilinéaire symétrique sur K^n.

1.2 Formes quadratiques

Définition 2 (*[dSP] p 29*)

Soit b une forme bilinéaire sur E. L'application

$$q_b : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & b(x,x) \end{array} \right.$$

*est appelée **forme quadratique associée à** b.*

On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E ; on appelle (E,q) espace quadratique.

Proposition 1 (*[dSP] p 29*)

Soit q une forme quadratique sur E associée à une forme bilinéaire b. On a :
- *Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in K$: $q(\lambda x) = \lambda^2 x$*
- *Pour tout $(x,y) \in E^2$, $b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$*

Démonstration : En effet, si on prend un couple $(x,y) \in E^2$ et un scalaire $\lambda \in K$, on a par bilinéarité :

$$q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda b(x, \lambda x) = \lambda^2 x$$

et

$$\begin{aligned} q(x+y) = b(x+y, x+y) &= b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) && \text{par bilinéarité} \\ &= q(x) + q(y) + 2b(x,y) && \text{car } b \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

■

De cette propriété, on déduit la définition suivante :

Définition 3 (*[dSP] p 30*)

La forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique q est unique, et appelée **forme polaire** *de q.*

Exemple 2 (*[dSP] p 31*)

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application* $\mathrm{Tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^2) \end{array} \right.$ *est une forme quadratique. Sa forme polaire est :* $b_{\mathrm{Tr}} : \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(K))^2 & \longrightarrow & K \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AB) \end{array} \right.$
- *L'application déterminant* $\det : \mathcal{M}_2(K) \to K$ *est une forme quadratique. Sa forme polaire est :* $b_{\det} : \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_2(K))^2 & \longrightarrow & K \\ (A,B) & \longmapsto & \frac{1}{2}(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)) \end{array} \right.$

Définition 4 (*[dSP] p 26,32*)

On appelle **matrice associée à** *q dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, notée $M_{\mathcal{B}}(q)$, la matrice symétrique $(b(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où b est la forme polaire de q.*

Proposition 2 (*[dSP] p 32*)

Soit $q \in Q(E)$. Soit A la matrice associée à q dans une base $\mathcal{B}$. Alors, si $x \in E$ a pour vecteur coordonnées X dans $\mathcal{B}$:

$$q(x) = {}^t X A X$$

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors,

$$M_{\mathcal{B}_2}(q) = {}^t P M_{\mathcal{B}_1}(q) P$$

Définition 5 (*[dSP] p 41*)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Deux formes quadratiques q_1 et q_2 sont équivalentes lorsqu'il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ telle que : $M_{\mathcal{B}}(q) = {}^t P M_{\mathcal{B}}(q') P$, c'est-à-dire que $M_{\mathcal{B}}(q)$ et $M_{\mathcal{B}}(q')$ sont congruentes.

1.3 Rang, noyau

Définition 6 (*[dSP] p 50*)

On appelle **noyau** *de q l'ensemble*

$$\ker(q) := \{x \in E, \forall y \in E, b(x,y) = 0\}$$

On remarque que le noyau est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 3 (*[dSP] p 50*)

Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(K)$, le noyau de la forme quadratique $X \mapsto {}^t XAX$ est précisément $\ker A$.

Définition 7 (*[dSP] p 50*)

On appelle **rang** *de q, le rang de $M_{\mathcal{B}}(q)$, pour une base $\mathcal{B}$ de E (indépendant du choix de la base). On le note $\mathrm{rg}\ (q)$.*

Proposition 3 (*[dSP] p 51*)

On a l'égalité suivante :

$$\mathrm{rg}\ (q) = n - \dim \ker q$$

Proposition 4 (*[dSP] p 51*)

Deux formes quadratiques équivalentes ont le même rang.

Démonstration : Cela vient du fait que deux formes quadratiques équivalentes sont représentées par les mêmes matrices. ■

Exemple 4 (*[dSP] p 51*)

La forme quadratique $q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2-2y^2+3z^2+4xy+6xz \end{array} \right.$ *est de rang 2 et de noyau* $\mathrm{Vect}(1,1,-1)$.

Définition 8 (*[dSP] p 51*)

*Une forme quadratique q est **non-dégénérée** lorsque* $\ker q = 0$.

Exemple 5 (*[dSP] p 51*)

La forme quadratique $\mathrm{Tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^2) \end{array} \right.$ *est non-dégénérée.*

Proposition 5 (*[dSP] p 51*)

La forme quadratique q est non-dégénérée si et seulement si l'application $b_g : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & b(x,\cdot) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que $\ker q = \ker b_g$. Ainsi :

$$q \text{ est non dégénérée } \Leftrightarrow \mathrm{rg}\ (q) = \dim E \Leftrightarrow \mathrm{rg}\ (b_g) = \dim E = \dim E^*$$

■

On a alors : pour tout $f \in E^*$, il existe un unique $a \in E$, tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = b(a,x)$.

2 Orthogonalité et isotropie

2.1 Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

Définition 9 (*[dSP] p 67*)

Soient x et y deux vecteurs de E. Soit q une forme quadratique ; soit b sa forme polaire. On dit que x est q-orthogonal à y et on écrit $x \perp y$ lorsque $b(x,y) = 0$.

Théorème 1 (*Pythagore - [dSP] p 69*)

Soient x et $y \in E$. Alors :

$$x \perp y \Leftrightarrow q(x+y) = q(x) + q(y)$$

Démonstration : Ce résultat vient du fait que $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2b(x,y)$ ■

Définition 10 (*[dSP] p 69*)

Soient A et B des parties de E. On dit que A est q-orthogonale à B lorsque : Pour tout vecteur x de A et tout vecteur y de B, x est q-orthogonal à y.

Définition 11 (*[dSP] p 69*)

Soit A une partie de E. On appelle q-orthogonal de A le sous-ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, x \perp a\}$$

Exemple 6

Pour tout $a \in E$, $\{a\}^\perp = \ker b(a,\cdot)$

Proposition 6 (*[dSP] p 70*)

Si la forme quadratique q est non-dégénérée, on a l'égalité suivante :

$$\dim A^\perp = n - \dim A$$

2.2 Isotropie

Définition 12 (*[dSP] p 41*)

*Soient (E,q) et (F,q') deux espaces quadratiques. On appelle **morphisme métrique** de (E,q) vers (F,q') tout application linéaire $u : E \to F$ telle que :*

$$\forall x \in E, q'(u(x)) = q(x)$$

*Si l'application u est injective, on dit que u est un **isomorphisme**.*

Définition 13 (*[dSP] p 52*)

- *Un vecteur $x \in E$ est dit **isotrope** (pour q) lorsque $q(x) = 0$. Sinon, on dit qu'il est **anisotrope**.*
- *Une forme quadratique q est dite **isotrope** lorsqu'elle admet un vecteur isotrope non-nul.*

Exemple 7 (*[dSP] p 52*)

Les vecteurs isotropes de $(x,y) \mapsto xy$ sont les éléments de $(K \times \{0\}) \cup (\{0\} \times K) \setminus \{(0,0)\}$.

Définition 14 (*[dSP] p 52*)

*On appelle **cône isotrope** de q l'ensemble*

$$Co(q) := \{x \in E, q(x) = 0\}$$

On remarque que le noyau d'une forme quadratique est inclus dans son cône isotrope. Mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 8 (*[dSP] p 52*)

Soit q une forme quadratique représentée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors, le noyau de q est nul car A est inversible, mais son cône isotrope est non-nul (vu le premier terme diagonal de A).

Attention : en général, le cône isotrope n'est pas un espace vectoriel. On pourra s'en convaincre avec l'exemple 14.

2.3 Plans hyperboliques et théorème de Witt

Les résultats de cette parties sont tirés de [Per] et [Ser].

Dans cette partie, on suppose que (E,q) est un espace quadratique non-dégénéré.

Définition 15

Si E est de dimension 2, on dit que (E,q) est un plan hyperbolique s'il existe une base (e_1, e_2) de E telle que :

$$q(e_1) = q(e_2) = 0 \text{ et } b(e_1, e_2) = 1$$

Proposition 7

Soit $x \in E$ un vecteur isotrope (non-nul). Alors, il existe un plan P de E contenant x tel que $q_{|P}$ soit hyperbolique.

Démonstration : On a déjà $q(x) = 0$. On cherche un vecteur $y \in E$ tel que $q(y) = 0$ et $b(x,y) \neq 0$ (ce qui implique que (x,y) est libre, car $b(x, \lambda x) = \lambda q(x) = 0$).

- Comme la forme quadratique q est non-dégénérée, il existe un vecteur $\hat{y} \in E$, tel que $b(x, \hat{y}) \neq 0$
- De plus, il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $q(\hat{y} - \lambda x) = 0$ (on prend $\lambda = \frac{q(\hat{y})}{2b(x,\hat{y})}$

On pose $y = \hat{y} - \lambda x$. Alors : $\mathrm{Vect}(x,y) = \mathrm{Vect}(x, \hat{(y)})$ et

$$b(x,y) = b(x, \hat{y} - \lambda x) = b(x,y) \neq 0$$

Finalement, on a bien $\mathrm{Vect}(x,y)$ est un plan hyperbolique. ∎

Théorème 2

Il existe $P_1, \ldots, P_r$ des plans hyperboliques de E et F un sous-espace anisotrope de E tels que :

$$E = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} P_i\right) \oplus^{\perp} F$$

Démonstration : On le montre par récurrence sur la dimension de E. En effet, si E est anisotrope, on a le résultat ($E = E$). Sinon, soit x un vecteur isotrope de q. Alors, d'après la proposition précédente, il existe un plan P contenant x tel que $q_{|P}$ soit hyperbolique. Le plan P admet une base (x, y), avec $b(x, y) = 1$, et donc la forme $q_{|P}$ est non-dégénérée, et on a :

$$E = P \oplus^{\perp} P^{\perp}$$

On recommence alors avec $P^{\perp}$. ■

Théorème 3 (*Witt*)

Soient (E, q) et (E', q') des espaces quadratiques non-dégénérés isométriques. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $u : F \to E'$ un morphisme métrique injectif. Alors, u se prolonge en une isométrie $\bar{u} : E \to E'$

Pour montrer ce théorème, on commence par prouver le lemme suivant.

Lemme 1

Si $q_{|F}$ est dégénérée, il existe un sous-espace vectoriel F_1 de E, tel que F soit un hyperplan de F_1 et tel que u se prolonge en un morphisme métrique injectif $\bar{u} : F_1 \to E'$.

Démonstration du lemme : Soit x un élément de $\ker q_{|F}$/ Soit $\phi \in F^*$ telle que $\phi(x) = 1$. Alors, il existe un vecteur $y \in E$ tel que pour tout $z \in F$, $\phi(z) = b(z, y)$ car (E, q) est non-dégénéré. On a de plus : $b(x, y) \neq 0$. Quitte à remplacer y par un $y - \lambda x$, on peut supposer que $q(y) = 0$. Un tel changement ne modifie pas le fait que pour tout $z \in F, b(z, y) = \phi(z)$.
On pose : $F' = u(F)$, $x' = u(x)$ et $\phi' = \phi \circ u^{-1}$. Alors, il existe un vecteur $y' \in E'$ tel que, pour tout $z' \in F'$:

$$\phi'(z') = b'(x', y') \text{ et } q'(y') = 0$$

On définit le morphisme $\bar{u}$ sur $F_1 = F \oplus \mathrm{Vect}(y)$ par $\left\{\begin{array}{l} \bar{u}_{|F} = u \\ \bar{u}(y) = y' \end{array}\right.$, . On vérifie alors que $\bar{u} : F_1 \to E'$ est un morphisme métrique injectif. ■

Démonstration du théorème : Comme E et E' sont isométriques, on suppose que $E = E'$. Grâce au lemme, on peut supposer que la forme quadratique $q_{|F}$ est non-dégénérée. On fait une récurrence sur la dimension de F.

- Si le sous-espace F est de dimension 1, on prend un vecteur x de F non nul et on cherche une isométrie qui envoie x sur $u(x)$. Posons $y = u(x)$. On a :

  $$q(x + y) \neq 0 \text{ ou } q(x - y) \neq 0$$

  En effet, si ces deux quantités étaient nulles, on aurait $q(x) + q(y) = 2q(x) = 0$, ce qui est impossible car $q_{|F}$ est non-dégénérée.
  Supposons par exemple que $q(x - y) \neq 0$ (autre cas symétrique). Posons $z = x - y$ et notons u_z la réflexion d'axe z. Alors :

  $$u_z(x - y) = x + y \text{ et } b(x - y, x + y) = q(x) - q(y) = 0$$

  Ainsi : $u_z(x + y) = x + y$ et donc $u_z(2x) = 2y$ et

  $$u_z(x) = y$$

  Finalement, la réflexion u_z est une isométrie de E qui envoie x sur y.
- Si l'espace F est de dimension supérieure ou égale à E, on peut écrire $F = F_1 \oplus^{\perp} F_2$. Alors $u_{|F_1}$ se prolonge à E en u_1 par hypothèse de récurrence. Quitte à remplacer u par $u_1^{-1} \circ u$, on se ramène au cas où $u_{|F_1} = \mathrm{id}$. On prolonge ensuite $u_{|F_2}$ en u_2 de F_2 à $F_1^{\perp}$ et on pose $\bar{u} = \mathrm{id}_{|F_1} \perp u_2$. ■

Corollaire 1

Si F et F' des sous-espaces de E et E' respectivement sont isométriques, alors $F^{\perp}$ et $F'^{\perp}$ sont aussi isométriques.

Démonstration : Une isométrie de E dans E' prolongeant celle de F dans F' induit une isométrie de $F^{\perp}$ dans $F'^{\perp}$. ■

Corollaire 2

Le "r" de la décomposition du théorème 2 est unique.

Démonstration : Supposons que : $\left(\bigoplus_{i=1}^{r} P_i\right) \oplus^{\perp} F = \left(\bigoplus_{j=1}^{r'} P'_j\right) \oplus^{\perp} F'$, avec $r \leqslant r'$. Alors :

$\bigoplus_{i=1}^{r} P_i$ est isométrique à $\bigoplus_{j=1}^{r} P'_j$, car deux plans hyperboliques sont isométriques. D'après le résultat précédent, le sous-espace F est donc isométrique à $\left(\bigoplus_{j=r+1}^{r'} P'_j\right) \oplus^{\perp} F'$.

Comme F n'a pas de vecteur isotrope, l'espace $\left(\bigoplus_{j=r+1}^{r'} P'_j\right) \oplus^{\perp} F'$ n'en a pas non plus et donc

$$r = r'$$

■

2.4 Bases orthogonales et diagonalisation

Définition 16 (*[dSP] p 87*)

*Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est dite q-**orthogonale** lorsque ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, i.e.*

$$\forall (i,j) \in [|1, n^2|], i \neq j \Rightarrow b(e_i, e_j) = 0$$

On prend pour convention que la famille vide de E est orthogonale.

Proposition 8 (*[dSP] p 88*)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale ;*
2. *la matrice représentant q dans $(e_1, \ldots, e_n)$ est diagonale*
3. *il existe n scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$q = \sum_{i=1}^{n} a_k \left(e_k^*\right)^2$$

Exemple 9 (*[dSP] p 88*)

La base canonique des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(K)$ est orthogonale pour la forme $A \mapsto Tr({}^t AA)$, mais elle ne l'est pas pour $A \mapsto Tr(A^2)$, si $n \geqslant 2$.

Une base orthogonale de $q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^2) \end{array} \right.$ *est :*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposition 9 (*[dSP] p 88*)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs anisotropes. Alors, elle est libre.

Démonstration : Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in K^r$ tel que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_k e_k = 0$. Pour tout $i \in [|1, r|]$, on applique la forme linéaire $b(\cdot, e_i)$ et on trouve $\alpha_i q(e_i) = 0$, d'où $\alpha_i = 0$. ■

Théorème 4 (*[dSP] p 89*)

Tout espace quadratique de dimension finie admet une base orthogonale.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur la dimension de E :

- Pour $n = 0$ ou 1, c'est évident.
- Soit $n \geqslant 2$. On suppose que tout espace quadratique de dimension inférieure strictement à n admet une base orthogonale.
  Soit (E, q) un espace quadratique de dimension n.
  Si $q = 0$, n'importe quelle base de E convient.

Sinon, on peut trouver un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, d'où $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite de (E, q).
Ensuite, on pose $H = \mathrm{Vect}(x)^{\perp}$; et comme la forme quadratique $q_{|\mathrm{Vect}(x)}$ est non-dégénérée, on a :

$$E = \mathrm{Vect}(x) \oplus^{\perp} H$$

On applique l'hypothèse de récurrence à H pour trouver une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de (H, q_H).
Alors, $(x, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base orthogonale de (E, q). ■

Proposition 10 (*[dSP] p 90*)

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une famille orthogonale de E telle que pour tout $k \in [|1, r|]$, $q(e_k) \neq 0$. On peut compléter $(e_1, \ldots, e_r)$ en une base orthogonale de E.

Démonstration : D'après la proposition 9, l'hypothèse assure que la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre. C'est donc une base du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$. Comme la matrice de q_F dans cette base est la matrice diagonale inversible $\mathrm{diag}(q(e_1), \ldots, q(e_r))$, la forme quadratique q_F est non-dégénérée. Ainsi, on a $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$; et on obtient la base souhaitée en juxtaposant $(e_1, \ldots, e_r)$ à une base orthogonale de $F^{\perp}$. ■

On se place dans le cas où $K = \mathbb{R}$

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Définition 17

*On dit que q est **définie positive** lorsque : pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$*

Théorème 5 (*Réduction simultanée - [dSP] p 181*)

Soient q et φ deux formes quadratiques de $Q(E)$, avec q définie positive. Alors, il existe une base de E qui est q-orthonormée et ϕ-orthogonale.

Démonstration : Si les formes φ et q sont colinéaires, et en particulier en dimension 1, le résultat est immédiat.
Supposons maintenant que (φ, q) est libre.

- D'abord, on montre qu'il existe un réel t tel que $\varphi + tq$ soit dégénérée.
  En effet, l'ensemble $\mathrm{Vect}(\varphi, q) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs. Il rencontre deux composantes connexes distinctes de $Q^*(E)$: celle des formes définies positives (en q) et celle des formes définies négatives (en $-q$). Ainsi, il contient forcément une forme dégénérée. C'est-à-dire qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^1 \setminus \{(0,0)\}$, tel que $\lambda\varphi + \mu q$ soit dégénérée. Comme q est définie positive, λ est non nul, et $t = \frac{\mu}{\lambda}$ convient.
- On choisit donc un réel t tel que $\varphi + tq$ soit dégénérée ; puis un vecteur x de $\ker(\varphi + tq) \setminus \{0\}$. Soit $H := \mathrm{Vect}(x)^{\perp_q}$. Comme le vecteur x est non nul, et la forme q est définie positive, on a : $q(x) \neq 0$ et $x \notin H$. Nécessairement $(x \neq 0)$, le sous-espace H est de dimension au plus $n - 1$.
  Soit y un vecteur de H. Alors $b_q(x, y) = 0$. Or, on a : $b_\varphi(x, y) + tb_q(x, y) = 0$, donc $b_\varphi(x, y) = 0$. Ainsi, l'espace H est φ-orthogonal à x.
- Finalement, en supposant (récurrence), le résultat vrai pour les formes φ_H et q_H (q_H est définie positive), on trouve une base $(e_2, \ldots, e_n)$ de H qui est φ-orthogonale et q-orthonormée. On pose alors $e_1 = \frac{x}{\sqrt{q(x)}}$, et la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base E qui est q-orthonormée et φ-orthogonale. ■

Application 1

Les matrices symétriques réelles sont diagonalisables. Il suffit d'appliquer théorème précédent à la forme quadratique associée à la matrice symétrique, et à la forme quadratique associée au produit scalaire euclidien.

Application 2 (*John-Loewner - développement 1*)

Soit K un compact non-vide de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe un unique ellispoïde centré en 0, de volume minimal contenant K.

Remarque : Un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ centré en 0 a une équation du type : $\{q(x) \leq 1\}$, où q est une forme quadratique définie positive.

2.5 Méthode de Gauss

On revient au cas où K est un corps de caractéristique différente de 2.

Proposition 11 (*Décomposition de Gauss - [Cog] p 49*)

Soit q une forme quadratique sur E de rang r. Alors il existe r éléments $\phi_1, \ldots, \phi_r$ de E^* linéairement *indépendants, et il existe r scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_r$ dans K tels que :*

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \phi_i(x)^2 \text{ et}$$

$$\forall (x,y) \in E^2, b(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \phi_i(x)\phi_i(y)$$

où b désigne la forme polaire de q.

Démonstration : On écrit : $q : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_{ij} x_i x_j$. On montre ce résultat par récurrence sur le nombre de variables n.

- Si $n = 1$, le résultat est immédiat.
- Maintenant, soit $n \geqslant 2$. On suppose que tout forme quadratique de $n-1$ variables s'écrit comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

  Cas 1 : S'il existe un i tel que $m_{ii} \neq 0$.

  Quitte à renommer les variables, on peut supposer que $i = 1$. Alors :

  $$q(x) = m_{11} x_i^2 + 2x_2 \sum_{j=2}^{n} (m_{1j} x_1 x_j) + R(x_2, \ldots, x_n)$$

  où R est une forme quadratique de $n-1$ variables. On pose $\varphi(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=2}^{n} m_{1j} x_j$. Alors, φ est une forme linéaire sur E et :

  $$\begin{aligned} q(x) &= m_{11} \left(x_1 + \frac{f(x_2, \ldots, x_n)}{m_{11}} \right)^2 - \frac{f(x_2, \ldots, x_n)^2}{m_{11}} + R(x_2, \ldots, x_n) \\ &= m_{11} \left(x_1 + \frac{f(x_2, \ldots, x_n)}{m_{11}} \right)^2 + S(x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

  où S est une forme quadratique de $n-1$ variables et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence : q est la somme de n formes linéaires, elles sont linéairement indépendantes par hypothèse de récurrence et parce que $x \mapsto x_1 + \frac{f(x_2, \ldots, x_n)}{m_{11}}$ est indépendante des $n-1$ autres formes linéaires qui ne font pas intervenir x_1.

  Cas 2 : Si pour tout $i \in [|1, n|]$, $m_{ii} = 0$:

  Comme la forme quadratique q est non-nulle, il existe $i \neq j$ tels que $m_{ij} \neq 0$. Quitte à renommer les variables, on peut supposer que $m_{12} \neq 0$. Alors, on a :

  $$q(x) = m_{12} x_1 x_2 + x_1 f(x_2, \ldots, x_n) + x_2 g(x_3, \ldots, x_n) + T(x_3, \ldots, x_n)$$

  où f et g sont des formes linéaires et T est une forme quadratique. Alors, on a :

  $$\begin{aligned} q(x) &= m_{12} \left[\left(x_1 + \frac{g(x_3, \ldots, x_n}{m_{12}} \right) \left(x_2 + \frac{f(x_2, \ldots, x_n)}{m_{12}} \right) - \frac{f(x_2, \ldots, x_n) g(x_3, \ldots, x_n)}{m_{12}^2} \right] + T(x_3, \ldots, x_n) \\ &= \frac{m_{12}}{4} \left[\left(x_1 + x_2 + \frac{f+g}{m_{12}} \right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{g-f}{m_{12}} \right)^2 \right] + T - \frac{fg}{m_{12}} \end{aligned}$$

  Comme $T - \frac{fg}{m_{12}}$ est une forme quadratique qui ne fait pas intervenir la variable x_1, on utilise l'hypothèse de récurrence et on conclut comme précédemment. ■

Remarque : Le résultat d'existence de la décomposition de Gauss se déduisent de la proposition 8 et du théorème 4. Toutefois, la preuve de cette décomposition est constructive et donne un algorithme pour calculer une base orthogonale de q.

Application à la classification des formes quadratiques Soit q une forme quadratique. D'après le résultat précédent, il existe une famille de formes linéaires linéairement indépendantes $(\phi_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, des scalaires $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, et une base $\mathcal{B}$ de E tels que :

$$q = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \phi_i^2 \text{ et } M_{\mathcal{B}}(q) = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)$$

Si K est un corps algébriquement clos
Si le corps est algébriquement clos, tous les β_i admettent une racine carrée α_i. Ainsi, quitte à multiplier les formes linéaires ϕ_i par α_i pour tout i, on obtient le résultat suivant.

Théorème 6 (*[Szp] p 80*)

Si K est algébriquement clos, il existe $(n+1)$ classes d'équivalence décrites par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$, *avec $0 \leqslant r \leqslant n$.*

Corollaire 3 (*[Szp] p 81*)

L'espace E admet un base orthonormale pour q si et seulement si q est non-dégénérée.

Si $K = \mathbb{R}$
Dans le cas réels, seuls les scalaires strictement positifs possèdent une racine carrée. Ainsi, on peut ramener les scalaires de la décomposition de Gauss à 1 ou -1.

Théorème 7 (*[Szp] p 75*)

Si $K = \mathbb{R}$, il existes $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes d'équivalence décrites par les matrices $\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-s-t} \end{pmatrix}$. *Le coupe (s,t) est appelé **signature** de q.*

Théorème 8 (*Inertie de Sylvester - [Szp] p 75*)

Soit $r = \mathrm{rg}\ q$. Il existe un unique couple $(s,t) \in \mathbb{N}^2$, tel que $r = s+t$ et pour tout base q-orthogonale $\mathcal{B}$ de E, la matrice $M_{\mathcal{B}}(q)$ (qui est diagonale) admet s coefficients strictement positifs et t coefficients strictement négatifs.

Si K est un corps fini $\mathbb{F}_p$, avec $p \neq 2$

Théorème 9 (*[Szp] p 83*)

Il existe $(2n+1)$ classes d'équivalence décrites par : $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} I_{r-1} & & \\ & \alpha & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$, *où $\alpha \in (\mathbb{F}_p^*)/(\mathbb{F}_p^*)^2$*

Corollaire 4 (*[Szp] p 84*)

Il existe exactement deux classes d'équivalence pour les formes quadratiques non-dégénérées.

3 Groupe orthogonal

3.1 Isométries

Définition 18 (*[Szp] p 314*)

*Le **groupe orthogonal** $O(q)$ est le groupe formé des isométries de q :*

$$O(q) = \{u \in GL(E) : \forall x \in E, q(u(x)) = q(x)\}$$

Démonstration : L'ensemble $O(q)$ est un groupe :

– Si u et v sont des éléments de $O(q)$, pour tout $x \in E$:

$$q(u \circ v(x)) = q(u(v(x))) = q(v(x)) = q(x)$$

– Si u est un élément de $O(q)$, alors u^{-1} existe (car u est inversible) et pour tout $x \in E$:

$$q(u^{-1}(x)) = q(u(u^{-1}(x))) = q(x)$$

Donc $u^{-1} \in O(q)$. ■

Exemple 10

Considérons la forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ *:* $q : (x,y) \mapsto x^2+y^2$*. Tout élément* u *de* $O(q)$ *s'écrit, dans une certaine base :* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$ *ou* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple 11 (*[dSP] p 54*)

Soit $a \in E$ *un vecteur anisotrope. On définit l'application (réflexion orthogonale) :*

$$s_a : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - 2\frac{b(a,x)}{q(a)}a \end{array} \right.$$

Alors s_a *est une isométrie :* $s_a \in O(q)$*.*
On peut remarquer que cette application correspond à la symétrie de E *par rapport à* $\ker b(a,\cdot)$ *et parallèlement à* $\mathrm{Vect}(a)$*.*

On suppose à partir de maintenant que la forme quadratique q est non-dégénérée.

Proposition 12 (*[dSP] p 55*)

Pour tout $u \in O(q)$*, on a :* $\det u = \pm 1$*.*

Application 3

Ainsi, le groupe orthogonal est fermé, comme image réciproque du fermé $\{-1, 1\}$ *par l'application continue déterminant.*

Remarque : si la forme quadratique q admet une base orthonormée, il existe une base dans laquelle tout élément u de $O(q)$ admet une matrice M telle que ${}^tMM = \mathrm{id}$. Ainsi, le groupe $O(q)$ est borné, il est donc compact.
Attention ! Ce n'est pas vrai dans le cas général : Si on considère $q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & R \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ (dégénérée), on s'aperçoit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'endomorphisme $u_\lambda : (x,y) \mapsto x + \lambda y$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, q(u(x)) = q(x)$$

Le groupe orthogonal de q n'est donc pas borné, donc pas compact.

Rappel : on considère une forme quadratique q non-dégénérée.

Définition 19 (*[dSP] p 56*)

On note $SO(q) = \{u \in O(q), \det u = 1\}$*, appelé* **groupe spécial orthogonal** *de* (E,q)*. Ses éléments sont appelés les rotations de l'espace quadratique* (E,q)*.*

3.2 Endomorphisme adjoint

Dans cette partie, on suppose que la forme quadratique q est non-dégénérée.

Définition 20 (*[Szp] p 64*)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*. Un* **adjoint** *de* u *est un endomorphisme* $u^* \in \mathcal{L}(E)$ *vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in E^2, b(u(x),y) = b(x, u^*(y))$$

Proposition 13 (*[Szp] p 64*)

L'endomorphisme u^* *existe et est unique.*

Proposition 14 (*[Szp] p 64*)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme. Alors :* u *est une isométrie si et seulement si* $u^* ou = id$

3.3 Cas euclidien

On suppose ici que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique définie positive q.

Proposition 15 (*[Szp] p 77*)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit $\mathcal{B}'$ une base quelconque de E. Alors : la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si ${}^t\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_n$, où $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Théorème 10 (*spectral - [dSP] p 185*)

Soit u un endomorphisme symétrique de E. Alors, il existe une base E orthonormale (pour q), composée de vecteurs propres de u.

Théorème 11 (*[dSP] p 190*)

Soit $u \in O(q)$. Alors il existe deux entiers $p, s \in \mathbb{N}$, et des éléments $\theta_1, \dots, \theta_r$ de $]O, \pi[$ tels que u soit représentée dans une certaine base orthonormée par :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & R(\theta_1) & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

avec pour tout i, $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.
Les entiers p et q ne dépendent pas du choix de la base, et les θ_i non plus (à l'ordre près).

Démonstration : Unicité Supposons trouvée une matrice du type annoncé représentant u. On remarque que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, la matrice $R(\theta)$ admet exactement deux valeurs propres complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ainsi, les θ_i de la matrice représentant u correspondent aux arguments des valeurs propres complexes (comptées avec ordre de multiplicité) de partie imaginaire strictement positive de u ; et les entiers p et q correspondent respectivement aux dimensions de $\ker(u - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(u + \mathrm{id}_E)$.

Existence On procède par récurrence sur la dimension de E.

- Si l'espace E est de dimension 1, les seuls automorphismes orthogonaux sont id_E et $-\mathrm{id}_E$, ce qui prouve le résultat dans ce cas.
- Supposons maintenant que $\dim E = 2$. Alors, si u est une réflexion, elle est représentée dans une certaine base orthonormée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  Si l'isométrie u est une rotation et une homothétie, elle est représentée par I_2 ou $-I_2$ dans n'importe quelle base orthonormée.
  Enfin, si u est une rotation mais pas une homothétie, elle est représentée dans une base orthonormée par $R(\theta), \theta \in]0, \pi[$

Enfin, si $\dim E \geqslant 3$, et qu'on suppose le résultat vrai dans tous les espaces euclidiens de dimension $\leqslant \dim E - 1$, alors E admet un sous-espace vectoriel V stable par u et de dimension 1 ou 2. On a alors : $V^\perp$ est aussi stable par u et $E = V \oplus^\perp V^\perp$.
Il suffit alors de remarquer que si on dispose d'un décomposition $E = F \oplus^\perp G$ et de bases orthonormées B_1 et B_2 de F et G respectivement, qui conviennent, une permutation appropriée de la base orthonormée de E obtenue en concaténant B_1 et B_2 convient. ■

4 Applications

4.1 Extremums

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de E.

Théorème 12 (*Schwarz - [Rou] p 294*)

Soit $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application deux fois différentiable en a. Alors, pour tout entiers i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Autrement dit, la différentielle seconde de f en a, $D^2 f(a)$ est une application bilinéaire symétrique :

$$\textit{Pour tous } h, k \in \mathbb{R}^n, D^2 f(a)(h, k) = D^2 f(a)(k, h)$$

Théorème 13 (*[Rou] p 364*)

Si f admet un minimum local en a et que $D^2f(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique positive (i.e pour tout $h \in E$, $D^2f(a,a) \geqslant 0$).

Si $Df(a) = 0$ et $h \in E \mapsto D^2f(a)(h,h)$ est une forme quadratique définie positive (respectivement définie négative), alors f admet un minimum (respectivement maximum) local strict en a.

Attention : Si la différentielle seconde n'est pas définie, on ne peut pas conclure, comme en atteste l'exemple suivant.

Exemple 12

Le seul point critique de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3$ est $(0,0)$. Or, $D^2f(0,0)$ est positive mais pas définie positive et $(0,0)$ n'est pas un minimum (même local) de f.
En revanche, la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^4$ admet un minimum strict en $(0,0)$ mais ne vérifie pas les conditions suffisantes du deuxième ordre.

4.2 Lemme de Morse

Lemme 2 (*Réduction des formes quadratiques - [Rou] p 209*)

Soit A_0 une matrice de $GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}$. Il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une fonction $\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$$

Démonstration : Soit $\hat{\varphi} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array} \right.$. La fonction $\hat{\varphi}$ est polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(I+H) - \hat{\varphi}(I) &= {}^t(I+H)A_0(I+H) - A_0 = {}^tHA_0H + A_0H + {}^tH1_0H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + {}^tHA_0H = {}^t(A_0H) + A_0H + O(\|H\|^2) \end{aligned}$$

Ainsi, $D\hat{\varphi}(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$ et

$$H \in \ker \hat{\varphi}(I) \Leftrightarrow A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On remarque que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et on pose $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_0H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$.
Soit $\psi = \hat{\varphi}_{|F} : F \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :

$I_n \in F$

$\ker \psi(I) = \ker(F\hat{\varphi}(I)) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$

$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim F$

Ainsi : $D\psi(I)$ est inversible et ψ est de classe $\mathcal{C}^1$; donc on peut applique le théorème d'inversion locale :
Il existe un voisinage ouvert U de I dans F (et on peut supposer que $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, par continuité du déterminant), tel que :

$$\psi : U \to V = \psi(U)$$

soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi^{-1}(A)A_0\psi^{-1}(A)$$

Il suffit de poser :

$$\rho = \psi^{-1}$$

■

Théorème 14 (*[Rou] p 364*)

Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0.
On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors :
Il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et :

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$$

Démonstration : On applique Taylor avec reste intégral à l'ordre 1. On a :

$$f(x) - f(0) - Df(0)\dot{x} = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)\dot{(}x,x)dt$$

C'est-à-dire : $f(x) - f(0) = {}^t x Q x$ où $Q : \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout x, $Q(x)$ est symétrique et $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est inversible. D'après le lemme, il existe un voisinage V de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une fonction $\rho : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall A \in V, {}^t\rho(A) Q(0) \rho(A) = A$$

Comme Q est continue, il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que : pour tout $x \in W$, $Q(x) \in V$ et alors :

$$Q(x) = {}^t\rho(Q(x)) Q(0) \rho(Q(x))$$

Soit $x \in W$. On pose : $M(x) = \rho(Q(x))$ et $y = M(x)\dot{x}$. Alors :

$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$$

Or, $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$. D'après le théorème d'inertie de Sylvester, il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^t A Q(0) A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

En posant $y = Au$ ($u = A^{-1}y$), on obtient :

$${}^t y Q(0) y = {}^t u {}^t A Q(0) A u = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$$

On pose donc :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & A^{-1} M(x) x \end{array} \right.$$

On a bien : $\varphi(0) = 0$, φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur W ; et f a l'expression souhaitée.

Enfin, pour tout $h \in W$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(h) - \varphi(0) &= A^{-1} M(h) h - A^{-1} M(0)(0) \\ &= A^{-1}(M(0) + o(1)) h = A^{-1} M(0) h + o(\|(\| h)) \end{aligned}$$

Ainsi, $D\varphi(0) = A^{-1} M(0)$ qui est inversible. On applique le théorème d'inversion locale à φ, qui est donc un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux voisinages de 0. ■

4.3 Théorème de Liapounov

Théorème 15 (*Liapounov - développement 2*)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :
- $f(0) = 0$
- *$Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative*

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{array} \right. \text{, d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

Alors : 0 est un point d'équilibre attractif du système, i.e. il existe V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que, si $x \in V$, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Développements

Théorème de John-Loewner

Ce développement est tiré de [FGN] (p 228).

Théorème 16 (*John-Loewner*)

Soit K un compact d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en $0_{\mathbb{R}^n}$, de volume minimal, contenant K.

On note Q l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$, Q^+ l'ensemble des formes quadratiques positives, et Q^{++} l'ensemble des formes quadratiques définies positives.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.
Un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ centré en 0 a une équation du type : $\{q(x) \leq 1\}$, où $q \in Q^{++}$. Pour $q \in Q^{++}$, on note : $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$.

Étape 1

Soit V_q le volume de $\mathcal{E}_q$, où $q \in Q^{++}$. Alors :

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}, \text{où } V_0 \text{ désigne le volume de la boule unité.}$$

Comme $q \in Q^{++}$, il existe $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ base orthonormale telle que :

$$\forall x \in E, \text{ si on note } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n, \text{ alors } q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \text{ les } a_i > 0$$

. Alors :

$$V_q = \int_{\sum a_i x_i^2 \leq 1} dx_1 ... dx_n$$

Le changement de variable défini par : $t_i = \sqrt{a_i} x_i$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de jacobien

$$|J| = \frac{1}{\sqrt{a_1 ... a_n}}$$

. Donc,

$$V_q = \int_{\sum t_i^2 \leq 1} \frac{dt_1 ... dt_n}{\sqrt{a_1 ... a_n}}$$

Soit S la matrice de q dans une base quelconque orthonormale. Alors : il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$, telle que

$$\operatorname{diag}(a_1, ..., a_n) = {}^t PSP \text{ et } \det S = a_1 ... a_n$$

Ainsi, le déterminant de q, $D(q) = \prod_{i=1}^{n} a_i$, ne dépend pas de la base orthonormée choisie, et

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{a_1 ... a_n}}$$

On peut donc reformuler le problème :
Il s'agit de montrer qu'il existe une unique $q \in Q^{++}$, telle que le déterminant $D(q)$ soit maximal et pour tout $x \in K, q(x) \leq 1$.

Étape 2

Soit $N : q \in Q \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$. L'application N est une norme sur Q.
Soit $A := \{q \in Q^+, \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$. Alors l'ensemble A est un convexe compact non-vide de Q.

Soient $q, q' \in A$, Soit $\lambda \in [0,1]$, Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geq 0 \text{ et donc : } \lambda q + (1 - \lambda q') \in Q^+$$

Soit $x \in K$. On a :

$$\lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \text{ donc } \lambda q + (1-\lambda) q' \in A$$

Donc A est convexe

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge dans Q^+ (fermé). Soit q la limite.

Montrons q est un éléments de A :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n, |q_n(x) - q(x)| \leq N(q - q_n)\,\|x\|$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \to q(x)$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \geq 0$ et pour tout $x \in K, q_n(x) \leq 1$, par passage à la limite, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in K, q(x) \leq 1$$

Donc l'ensemble A est fermé.

Comme $\mathring{K}$ n'est pas vide, il existe un éléments $a \in \mathring{K}$ et un réel $r > 0$ tels que $\mathcal{B}(a,r) \subset K$. Soit $q \in A$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $\|x\| \leq r$: $a + x \in K$ et $q(a+x) \leq 1$. Donc, par Minkowski :

$$\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$

Si $\|x\| \leq 1$:

$$|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2}q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$$

Donc $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$. C'est vrai pour tout $q \in A$, donc A est borné.

Comme K est borné, il existe un réel $M > 0$, tel que pour tout $x \in K, \|x\| \leq M$. Soit $q_1 : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M}$. Alors : pour tout $x \in \mathbb{R}^n, q_1(x) \geq 0$, et on a l'égalité si et seulement si $x = 0$. De plus, pour tout $x \in K, q_1(x) \leq 1$, par définition de M. Donc la forme quadratique q_1 est un élément de A, et donc l'ensemble A est non-vide.

Par continuité du déterminant : l'application $q \mapsto D(q)$ est continue sur le compact A. Donc elle admet un maximum sur A, et atteint ce maximum en (au moins) un point. Soit q_0 ce point.
On a vu : $q_1 \in A \cap Q^{++}$ donc $D(q_1) > 0$ donc $q_0 \in Q^{++}$.

Il existe un ellipsoïde$\mathcal{E}_{q_0}$ de volume minimal qui contient K

Il reste maintenant à montrer que cet ellipsoïde est unique.

Étape 3

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. Alors :

$$\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

D'après le théorème de pseudo-réduction : il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, où les λ_i sont des réels strictement positifs, telles que : $A = {}^tPP, B = {}^tPDP$. Alors, on a :

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha (\det P^2 \det D)^\beta = \det P^2 (\det D)^\beta$$

et

$$\det(\alpha A + \beta B) = \det P^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$$

Il faut donc montrer : $\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det D)^\beta$, i.e. :

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$$

C'est-à-dire (en prenant le logarithme) :

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i$$

Par concavité du logarithme : pour tout $1 \leq i \leq n$, $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln 1 + \beta \ln \lambda_i = \beta \ln \lambda_i$. On obtient le résultat en sommant les inégalités.
Pour $A \neq B$ et $0 < \alpha < 1$, un au moins des λ_i n'est pas égal à un, donc l'une des inégalités est stricte et on obtient :

$$\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

Étape 4

Conclusion

Maintenant, supposons qu'il existe $q \in A$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$. Alors : Soient S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a : S et $S_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Comme A est convexe, $\frac{1}{2}(q + q_0) \in A$ et d'après le résultat précédent :

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}} (\det S_0)^{\frac{1}{2}} = D(q_0)$$

Cela contredit la maximalité de $D(q_0)$, d'où le résultat.

Théorème de Liapounov

Ce développement est inspiré de [Rou] p 143

Théorème 17 (*Liapounov*)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :
- *$f(0) = 0$*
- *$Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative*

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{array} \right. \quad \text{, d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

Alors : 0 est un point d'équilibre attractif du système, i.e. il existe V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que, si $x \in V$, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Soit $A = Df(0)$; Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. Alors :

Étape 1

Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, ||e^{tA}x|| \leq P(|t|) \left(\sum_{j=0}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)} \right) ||x||$$

Si $\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{m_j}$, alors, d'après le lemme des noyaux :

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{j=1}^{k} \ker((A - \lambda_j)^{m_j})$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, x se décompose de manière unique en : $x_1 + ... + x_k$, avec pour tout $j \in [|1, k|]$

$$x_j \in E_j := \ker((A - \lambda_j)^{m_j})$$

Chaque E_j est stable par A et pour tout $j \in [|1, k|]$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, e^{tA}x_j &= e^{t\lambda_j I_n} e^{t(A - \lambda_j I_n)} x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda j I_n)^p \right) x_j \text{ car } x_j \in E_j \end{aligned}$$

Si on munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall j \in [|1, k|], \forall t \in \mathbb{R}, \left\| e^{tA} x_j \right\| &= \left\| e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda j I_n)^p \right) x_j \right\| \\ &\leq e^{t\Re(\lambda_j)} C_j \mid \sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} \mid \|x_j\| \text{ où } C_j = \max_{0 \leq p < m_j} \|A - \lambda_j I_n\|^p \\ &\leq e^{t\Re(\lambda_j)} C_j (1 + |t|)^{m_j - 1} \|x_j\| \\ &\leq C e^{t\Re(\lambda_j)} (1 + |t|)^{n-1} \|x_j\| \text{ où } C = \max_{1 \leq j \leq k} C_j \text{ , car } m_j \leq n \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mid \sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} \mid &\leq \sum_{p=0}^{m_j - 1} \binom{m_j - 1}{p} |t|^p \underbrace{\frac{(m_j - 1 - p)!}{(m_j - 1)!}}_{\leq 1} \\ &\leq \sum_{p=0}^{m_j - 1} \binom{m_j - 1}{p} |t|^p = (1 + |t|)^{m_j - 1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^n$, vu comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA}x\right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \mu \left\|e^{tA}x\right\|_{\mathbb{C}^n} \\
&\leq \mu \sum_{j=1}^{k} \left\|e^{tA}x_j\right\|_{\mathbb{C}^n} \\
&\leq \mu C(1+|t|)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \underbrace{\max_{1\leq j\leq k} \|x_j\|_{\mathbb{C}^n}}_{\leq \nu \|x\|_{\mathbb{C}^n}} \\
&\leq P(|t|) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \|x\|_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

où $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, par équivalence des normes en dimension finie.

Étape 2

On considère le système linéarisé en 0 :

$$\left\{\begin{array}{l} z' = Az \\ z(0) = x \end{array}\right. \quad \text{, d'inconnue } z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

Alors : $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \to \infty$

Le système linéarisé admet pour unique solution globale : $z : t \mapsto e^{tA}x$. Comme les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative : il existe un réel $a > 0$, tel que pour tout $j \in [|1, k|], \Re(\lambda_j) < -a$. Ainsi, on a :

$$P(|t|) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) e^{at} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\exists C > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, P(|t|) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \leq Ce^{-at}$$

Donc, d'après le lemme,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \|z(t)\| \leq Ce^{-at} \|x\|$$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre attractif du système linéarisé.

Étape 3

L'intégrale $b(x,y) = \int_0^\infty (e^{tA}x|e^{tA}y)dt$ définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, de forme quadratique associée q. On a : $(\nabla q(x)|Ax) = -||x||^2$, où ∇q désigne le gradient de q.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'étape 2, on a les inégalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, |(e^{tA}x|e^{tA}y)| \leq \left\|e^{tA}x\right\| \left\|e^{tA}x\right\| \leq C^2e^{-2at} \|x\| \|y\|$$

Donc b est bien définie.
De plus, c'est bien une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \int_0^\infty \left\|e^{tA}x\right\|^2 dt \geq 0$$

En outre, si $q(x) = 0$, la fonction sous l'intégrale est identiquement nulle, donc $x = 0$. Donc q est définie positive. Par ailleurs, pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a : $q(x+h) = q(x) + 2b(x,h) + q(h)$. D'où : $Dq(x) \cdot h = 2b(x,h)$. Donc, pour

$x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(\nabla q(x)|Ax) &= Dq(x)Ax \\ &= \int_0^\infty 2(e^{tA}x|e^{tA}Ax)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{tA}x|e^{tA}x)dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[\left\|e^{tA}x\right\|^2\right]_0^T \\ &= -\left\|x\right\|^2 \text{ d'après l'étape 2}\end{aligned}$$

Étape 4

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale y au système différentiel, définie sur un intervalle maximal $I := [0, \delta[$, $\delta \in]0, \infty]$.
On note : $r(y) = f(y) - Ay$. On a alors :

$$q(y)' = -||y||^2 + 2b(y, r(y)) \text{ et } \exists \alpha, \beta > 0, q(y) \leq \alpha \Rightarrow -||y||^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$$

On a :

$$\begin{aligned}q(y)' &= \frac{d}{dt}q(y) = Dq(y)(y') \\ &= 2b(y, y') \\ &= 2b(y, f(y)) = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \\ &= -\left\|y\right\|^2 + 2b(y, r(y))\end{aligned}$$

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz : $|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$.
De plus, $r(y) = f(y) - f(0) - Df(0)y$. Donc, par définition de la différentielle : $r(y) = \sqrt{q(y)}\eta(y)$, où $\eta(y) \to_{\|y\|\to 0} 0$.
Donc :

$$\sqrt{q(r(y))} = \sqrt{q(\eta(y)\sqrt{q(y)})} = \sqrt{q(y)}\sqrt{q(\eta(y))}$$

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de $v \mapsto \sqrt{q(v)}$,

$$\exists \alpha > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, q(y) \leq \alpha \Rightarrow \sqrt{q(\eta(y))} \leq \epsilon \text{ donc } \sqrt{q(r(y))} \leq \epsilon\sqrt{q(y)}$$

Ainsi

$$2b(y, r(y)) \leq 2\epsilon q(y)$$

Comme l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, les normes $\|\cdot\|$ et $\sqrt{q}$ sont équivalentes. Donc il existe un réel $K > 0$, tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n, Kq(y) \leq \|y\|^2$. Soit $\beta = K - 2\epsilon$ ($\beta > 0$ si $\epsilon < C/2$). On obtient :

$$q(y)' \leq -\beta q(y)$$

Étape 5

Conclusion

Supposons $q(x) < \alpha$. Alors : pour tout $t \geq 0, q(y(t)) < \alpha$. Sinon, on aurait :
Si $t_0 := \inf\{t > 0 q(y(t)) = \alpha\}$, alors $q(y)'(t_0) \geq -\beta y(t_0) = -\beta\alpha < 0$ et donc, pour $t < t_0$, proche de t_0, $q(y(t)) > \alpha$, ce qui contredit la minimalité de t_0.
Ainsi, la quantité $y(t)$ reste dans un compact donc la fonction y est définie sur $[0, \infty[$, et $\forall t \geq 0, q(y)'(t) \leq -\beta q(y(t))$. Donc :

$$\forall t \geq 0, \frac{d}{dt}(e^{\beta t}q(y(t))) = e^{\beta t}(q(y)'(t) + \beta q(y(t))) \leq 0$$

En particulier :

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t}q(x)$$

D'où le résultat par équivalence de $\|\cdot\|$ et $\sqrt{q}$.

Questions posées pendant la présentation

- **Est-ce que pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e^A est un polynôme en A ?**
  L'espace $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. Ainsi, l'espace $\mathbb{R}[A]$ est fermé. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{A^n}{n!} \in \mathbb{R}[A]$$
  Or, $e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^n}{n!}$. On obtient : $e^A \in \mathbb{R}[A]$.
- **Énumérer les différentes formes quadratiques de $\mathbb{R}^2$.**
  Il y a 3 classes d'équivalence des formes quadratiques. On donne un représentant de chaque classe :
  1. Dans le cas d'une signature (1,0), on regarde la forme quadratique $q : (x, y) \mapsto x^2$
     La forme q est représentée dans une base $\mathcal{B}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Son groupe orthogonal est : $O(q) = \left\{ u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) : M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$
  2. Si la signature est $(1, 1)$, on regarque $q : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Une matrice de q est donc I_2 et tout élément u de $O(q)$ s'écrit, dans une certaine base : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  3. Enfin, il y a les formes quadratiques de signature $(1, -1)$: $q : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.
- **Soit F un sous-espace de (E, q), où q est une forme quadratique non-dégénérée. Montrer que si $q_{|F}$ est non-dégénérée, alors $E = F \oplus^\perp F^\perp$.**
  Comme q est non-dégénérée, l'application $b_g : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & b(x, \cdot) \end{array} \right.$ est une isométrie. En particulier, elle est bijective et elle induit une application
$$\hat{b} : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & b(x, \cdot) \end{array} \right.$$
  L'application $\hat{b}$ est de rang $\dim F$ (car son image est égale à $b_g(F)$ avec b_g bijective) et on remarque que son noyau est exactement $F^\perp$. D'après le théorème du rang, on a :
$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$
  Si, par ailleurs, $q_{|F}$ est non-dégénérée, on a :
$$F \cap F^\perp = \{x \in F, \forall y \in F, b(x, y) = 0\} = \ker q_{|F} = \{0\}$$
  Donc F et $F^\perp$ sont en somme directe.
  Finalement, $F \oplus F^\perp$ est un sous espace de E de dimension $\dim F + \dim D^\perp = \dim E$. Donc
$$E = F \oplus F^\perp$$
  .
- **Donner dans $\mathbb{R}^2$ une forme quadratique qui admet une base orthogonale mais pas de base orthonormée.**

  Soit $q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array} \right.$. Alors la base canonique $\mathcal{B}_0$ est une base orthogonale pour q et $M_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
  Mais comme q est de signature $(1, -1)$, pour toute base orthogonale $\mathbb{B}$ de E, la matrice $M_{\mathbb{B}}(q)$ est diagonale avec un coefficient strictement positif et un strictement négatif : la base ne peut pas être orthonormale pour q.

Références

[Cog] Michel Cognet. *Algèbre bilinéaire.*

[dSP] Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques.*

[FGN] Serge Franicou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS, algèbre 3.*

[Per] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.*

[Rou] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

[Ser] Serre. *Cours d'arithmétique.*

[Szp] Szpirglas. *Mathématiques algèbre 3.*