

Leçons de Mathématiques pour l'option informatique

Manon Ruffini

13 juin 2016

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Rapport du jury

On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, S_n , etc). Par exemple, proposer un générateur simple de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries A_4, S_4, A_5 et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Il est utile de connaître les groupes diédraux, et pour les candidats aguerris, les spécificités de groupes plus exotiques comme le groupe quaternionique. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Groupes finis

Définition 1.1. *Groupe fini, ordre d'un groupe* [Ulm] p 2

Exemple 1.1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, S_n [Ulm] p 4

Définition 1.2. *Ordre d'un élément* [Ulm] p 6

Proposition 1.1. *L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe* [Ulm] p 7

Exemple 1.2. $GL(2, 2)$ [Ulm] p 7

Exemple 1.3. *Groupe symétrique* [Ulm] p 4

Définition 1.3. *Exposant d'un groupe* [FGNb] p 170

Proposition 1.2. *exposant 2 alors fini*

Théorème 1.1. [Burnside] [FGNb] p 171

Exemple 1.4. *C-ex : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ est d'exposant 2 et infini* [FGNb] p 171

1.2 Théorème de Lagrange

Définition 1.4. *Indice d'un sous groupe* [Ulm] p 24

Exemple 1.5. $(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z})$ [Ulm] p 25

Théorème 1.2. $|G| = |H|(G : H)$ [Ulm] p 25

Théorème 1.3. *Lagrange* [Ulm] p 25

Application 1.1. *ordre premier $\Rightarrow$ cyclique* [Ulm] p 25

Application 1.2. *Indice 2 $\Rightarrow$ distingué* [Ulm] p 25

1.3 Théorèmes d'isomorphisme

Théorème 1.4. *Premier thm d'isomorphisme* [Ulm] p 63

Application 1.3. *G cyclique d'ordre n iso $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$* [Ulm] p 63

Théorème 1.5. *Troisième thm d'isomorphisme* [Ulm] p 64

Exemple 1.6. $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})(2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

1.4 Actions de groupes

Définition 1.5. *Action de groupe + bij automorphismes* [Ulm] p 27-28

Exemple 1.7. *Action de $S(X)$ sur X* [Ulm] p 28

Définition 1.6. *Orbite, stabilisateur* [Ulm] p 29

Théorème 1.6. *Noyau = intersection des stabilisateurs* [Ulm] p 30

Théorème 1.7. *Cayley* [Ulm] p 31

Théorème 1.8. *Relation orbite-stabilisateur* [Ulm] p 67

Corollaire 1.1. *Formule des classes + Formule de Burnside* [Ulm] p 68

Application 1.4. [Endomorphismes diagonalisables de $GL_n(\mathbb{F}_q)$] [CG] p 284-285

2 Cas des groupes abéliens

2.1 Groupes cycliques

Définition 2.1. *Groupe cyclique* [Com] p 59

Rq : abélien $\Rightarrow$ cyclique MAIS $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abélien mais pas cyclique.

Exemple 2.1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com] p 59

Proposition 2.1. *Ordre de a^k , a^k générateur ssi $+ \varphi(n)$ générateurs distincts* [Com] p 59

Exemple 2.2. *Générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$* [Com] p 60

Proposition 2.2. *G et G' iso ssi même ordre* [Com] p 61

Proposition 2.3. *$\text{Aut}(G)$* [Com] p 61

Proposition 2.4. *Tout ss groupe est cyclique et $\forall d|n, \exists \dots$* [Com] p 62

Exemple 2.3. *sous groupes de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$* [Com] p 62

Application 2.1. $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ [Com] p 63

Définition 2.2. *groupe simple* [Com] p 64

Proposition 2.5. *ordre premier ssi cyclique et simple* [Com] p 64

2.2 Décomposition en facteurs invariants

Théorème 2.1. *Chinois* [Ulm] p 79

Théorème 2.2. *G isomorphe à $(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}/q_k\mathbb{Z})$* [Com] p 66

Définition 2.3. *Suite des invariants de G* [Com] p 67

Exemple 2.4. $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ [Com] p 68

3 Groupes finis non-abéliens

3.1 p -groupes et théorèmes de Sylow

3.1.1 p -groupes

Définition 3.1. *p -groupe* [Ulm] p 69

Théorème 3.1. *Points fixes d'un p groupe* [Ulm] p 69

Théorème 3.2. *Cauchy* [Ulm] p 69

Proposition 3.1. *p -groupe ssi fini d'ordre puissance de p* [Ulm] p 70

Proposition 3.2. *G d'ordre p^2 abélien* [Ulm] p 71

3.1.2 Théorèmes de Sylow

Définition 3.2. *p -sous groupe de Sylow* [Per] p 18

Exemple 3.1. $GL_n(\mathbb{F}_q)$ [Per] p 18

Lemme 3.1. *p -Sylow* [Per] p 19

Théorème 3.3. *Existence d'un p -Sylow* [Per] p 18

Théorème 3.4. *Sylow* [Per] p 19

Corollaire 3.1. *unique p -Sylow ssi distingué* [Per] p 19

Application 3.1. *Un groupe d'ordre 63 n'est pas simple* [Per] p 20

3.2 Groupe symétrique

Rappel : groupe symétrique + ordre [Ulm] p 4

Définition 3.3. *Cycle* [Ulm] p 43

Théorème 3.5. *Décomposition en produit de cycles à support disjoints* [Ulm] p 43

Exemple 3.2. [Ulm] p 44

Définition 3.4. *Type d'une permutation* [Ulm] p 45

Proposition 3.3. *Ordre d'une permutation (type)* [Ulm] p 45

Proposition 3.4. *conjuguées ssi même type* [Ulm] p 46

Théorème 3.6. *S_n est engendré par les transpositions* [Ulm] p 48

Définition 3.5. *Signature* [Ulm] p 49

Proposition 3.5. *Signature en fonction des transpositions, du type* [Ulm] p 49

Définition 3.6. *Groupe alterné (indice 2)* [Ulm] p 50

Proposition 3.6. *A_n est engendré par les 3-cycles* [Ulm] p 52

Proposition 3.7. A_n est simple, pour $n \geq 5$ [Ulm] p 53 [Per]

3.3 Groupes diédraux

Définition 3.7. *Groupe diédral* [Ulm] p 8

Proposition 3.8. *Ordre, générateurs, sous groupe distingué* [Ulm] p 9

Développements

- Théorème de Burnside
- Endomorphismes diagonalisables de $GL_n(\mathbb{F}_q)$
- Théorème de Sylow
- Simplicité de $\mathcal{A}_n$

Références

- Ulmer
- Combes
- Perrin
- X ENS algèbre 2
- H2G2

Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Rapport du jury

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, et, pour les candidats confirmés, dominer les problèmes de dénombrement qui en résultent. Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations.

Par ailleurs, un candidat qui se propose de démontrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ devrait savoir donner des applications à la simplicité d'un groupe.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes d'un groupe, par exemple, à ceux du groupe symétrique. On note que les candidats connaissent en général les applications du groupe symétrique aux polyèdres réguliers de l'espace.

1 Le groupe symétrique

1.1 Définition

Définition 1.1. Groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ [Ulm] p 4

Proposition 1.1. Cardinal [Ulm] p 4

Définition 1.2. $\mathfrak{S}_n$ quand $X = \{1 \dots n\}$ [Ulm] p 4

Proposition 1.2. Quand $|X| = n$, $\mathfrak{S}(X) \sim \mathfrak{S}_n$

Exemple 1.1. Notation + Dans $\mathfrak{S}_3$ + non commutatif [Ulm] p 41

1.2 Groupe symétrique et actions de groupes

Définition 1.3. Action à gauche [Ulm] p 27

Proposition 1.3. action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ + notation [Ulm] p 41

Définition 1.4. Morphisme structurel [Ulm] p 28

Proposition 1.4. bijection opérations à gauche et morphismes [Ulm] p 29

Théorème 1.1. Cayley [Ulm] p

1.3 Orbites et cycles

Définition 1.5. Point fixe, partie stable, support [Ulm] p 42

Proposition 1.5. sur les supports [Ulm] p 42

Définition 1.6. cycle + transposition [Ulm] p 43

Exemple 1.2. [Ulm] p 43

Théorème 1.2. Décomposition en produit de cycles à supports disjoints [Ulm] p 43

Exemple 1.3. [Ulm] p 44

1.4 Classes de conjugaisons

Définition 1.7. Type d'une permutation [Ulm] p 45

Proposition 1.6. Ordre d'une permutation en fct du cycle [Ulm] p 45

Exemple 1.4. [Ulm] p 45

Proposition 1.7. CNS permutations conjuguées

1.5 Générateurs

Lemme 1.1. Tout cycle est produit de transpositions [Ulm] p 48

Proposition 1.8. engendré par les transpositions [Ulm] p 48

Proposition 1.9. Engendré par les $(1i)$ [Ulm] p 52

2 Le groupe alterné

2.1 Le morphisme signature

Définition 2.1. Signature [Ulm] p 49

Exemple 2.1. [Ulm] p 49

Proposition 2.1. Sur la signature [Ulm] p 49

Définition 2.2. Permutation paire ou impaire [Ulm] p 50

Théorème 2.1. Frobenius Zolotarev [BMP]

2.2 Le groupe alterné

Définition 2.3. *Groupe alterné* [Ulm] p 50

Proposition 2.2. *distingué + cardinal* [Ulm] p 50

Exemple 2.2. $\mathfrak{A}_4$ [Ulm] p 50

Proposition 2.3. *Engendré par les 3-cycles* [Ulm] p 52

Définition 2.4. *Groupe simple* [Ulm] p 52

Théorème 2.2. $\boxed{\mathfrak{A}_n \text{ simple, } n \geq 5}$ [Ulm] p 53 [Per]

2.3 Sous-groupes

Proposition 2.4. *Groupes dérivés de $\mathfrak{A}_n, n \geq 5$ et $\mathfrak{S}_n, n \geq 2$* [Per] p 28

Exemple 2.3. *C-ex : $\mathcal{D}(\mathfrak{A}_4)$* [Per] p 30

Corollaire 2.1. *Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n, n \geq 5$* [Per] p 30

Théorème 2.3. *Tout auto est intérieur* [Per] p 30

3 Applications

3.1 Déterminant

Définition 3.1. *Forme p-linéaire* [Goua] p 134

Définition 3.2. *Forme alternée, forme antisymétrique* [Goua] p 134

Proposition 3.1. *antisymétrique ssi (avec la signature)* [Goua] p 134

Théorème 3.1. *car $\neq 2$: antisym ssi alternée* [Goua] p 134

Théorème 3.2. *fl alternées : ev de dim 1, engendrée par le det + expression du det* [Goua] p 134

3.2 Polynômes symétriques

Définition 3.3. *Polynôme symétrique* [Goua] p 78

Exemple 3.1. $XY + YZ + ZX$ [Goua] p 78

Définition 3.4. *Polynôme symétrique élémentaire* [Goua] p 78

Théorème 3.3. *Tout polynôme symétrique s'écrit ...* [Goua] p 78

Application 3.1. *polynômes sur $\mathbb{Z}$ unitaires* [FGNa] p 213

Développements

- Simplicité de $\mathcal{A}_n$
- Frobenius Zolotarev

Références

- Ulmer
- Perrin
- X ENS algèbre 1
- Gourdon algèbre
- Alessandri
- Objectif agrégation

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Rapport du jury

???

Soit K un corps commutatif et E un K -espace vectoriel de dimension finie.

1 Le groupe linéaire

1.1 Définition

Définition 1.1. Groupe linéaire, $GL_n(K)$ [Szp] p 294

Proposition 1.1. isomorphisme groupe linéaire et matrices [Szp] p 294

Rq : on peut parler de déterminant (indépendant de la base) [Szp] p 294

Proposition 1.2. Caractérisation en dimension finie [Szp] p 295

Exemple 1.1. C-ex : c'est faux en dimension infinie [Szp] p 295

Proposition 1.3. Le déterminant est un morphisme [Szp] p 296

Définition 1.2. Groupe spécial linéaire [Szp] p 297

Proposition 1.4. Suite exacte [Szp] p 297

Proposition 1.5. Cardinaux GL et SL pour les corps finis [Per] p 105

1.2 Générateurs

Proposition 1.6. déf : dilatation [Per] p 96

Proposition 1.7. déf : transvection [Per] p 97

Proposition 1.8. Générateurs de SL et GL [Per] p 99

Proposition 1.9. Conjugaison des transvections et des dilatations + cas $n = 2$ [Per] p 100

1.3 Éléments de topologie

Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Topologie = norme subordonnée à la norme euclidienne [Szp] p 310

Proposition 1.10. GL ouvert dense [Szp] p 310

Définition 1.3. GL^+ et GL^- [Szp] p 311

Proposition 1.11. Homéomorphisme entre GL^+ et GL^- [Szp] p 311

Proposition 1.12. Homéo GL et SL [Szp] p 311

Proposition 1.13. cas complexe : connexité de GL et SL [Szp] p 311

Proposition 1.14. Composantes connexes dans le cas réel [Szp] p 313

2 Sous-groupes de $GL(E)$

2.1 Groupe dérivé

Théorème 2.1. sur les groupes dérivés [Szp] 302

Application 2.1. Frobenius Zolotarev [BMP] p 250

2.2 Sous-groupes finis

Définition 2.1. matrice de permutation [BMP] p 188

Proposition 2.1. injection S_n dans GL_n [BMP] p 188

Théorème 2.2. Cayley [Szp] p 239

Application 2.2. Tout sous groupe fini est isomorphe à un sous groupe de GL
SANS REF

Application 2.3. Sylow [Per] p 18

Définition 2.2. Exposant d'un groupe [FGNb]

Théorème 2.3. Burnside [FGNb]

2.3 Groupe orthogonal

Car $K \neq 2$. q forme quadratique f sa forme polaire

Définition 2.3. groupe orthogonal [Szp] p 314

Proposition 2.2. Déterminant dans le GO [Szp] p 314

Définition 2.4. Groupe spécial orthogonal [Szp] p 315

Définition 2.5. *Symétrie orthogonale* [Szp] p 315

Définition 2.6. *Réflexion orthogonale* [Szp] p 316

Proposition 2.3. $O(q)$ engendré par les réflexions [Szp] p 316

Théorème 2.4. *Cartan Dieudonné* [Szp] p 317

Définition 2.7. *renversement* [Szp] p 318

Corollaire 2.1. $SO(q)$ [Szp] p 318

Définition 2.8. *Cas euclidien* : $O_n(\mathbb{R})$ [Szp]

Proposition 2.4. $O_n(\mathbb{R})$ est compact [Szp] p 328

Théorème 2.5. *Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$* [Ale]

Développements

- Frobenius Zolotarev
- Sous groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- Burnside

Références

- Perrin
- X ENS algèbre 2
- Szpirglas
- OA

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Rapport du jury

C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes. Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de Gauss et de ses applications est envisageable.

Introduction

Définition 0.9. Groupe engendré, partie génératrice [Ulm] p 6

Exemple 0.1. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ [Ulm] p 6

Proposition 0.5. Ensemble des mots [Ulm] p 7

Exemple 0.2. $\mathbb{Q}$ est engendré par les $\{\frac{1}{p}, p \text{ premier}\}$ Ref ?

1 Groupes abéliens

1.1 Groupes monogènes et cycliques

Définition 1.1. Groupe monogène [Per] p 10

Rq : tout groupe monogène est abélien. [Goua] p 19

Proposition 1.1. isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Per] p 10

Définition 1.2. Groupe cyclique [Per] p 10

Exemple 1.1. Cas de $|G| = p$ [Per] p 10

Exemple 1.2. C-ex : $GL(2, 2)$ [Ulm] p 7

Proposition 1.2. Caractérisation des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Per] p 24

Corollaire 1.1. Il y a $\varphi(n)$ générateurs [Per] p 24

Application 1.1. isomorphisme avec $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ [Per] p 24

Application 1.2. Nombre de morphismes $G \rightarrow G'$, où cycliques [Com] p 74

Théorème 1.1. ss groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps [Per] p 74

Exemple 1.3. sous groupes finis de $\mathbb{C}^*$ [Com] p 76

Application 1.3. Symbole de Legendre unique morphisme $\mathbb{F}_p^*$ [BMP] p 251

Exemple 1.4. $\#(\text{hom}(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})) = 6$ [Com] p 74

1.2 Groupes abéliens finis

Théorème 1.2. Lemme Chinois [Per] p 21

Théorème 1.3. Structure [Com] p 66

Définition 1.3. Invariants [Com] p 67

Corollaire 1.2. G d'ordre p^m [Com] p 67

Corollaire 1.3. G abélien fini

Exemple 1.5. $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ [Com] p 68

Application 1.4. Structure des groupes d'ordre 600 [Com] p 68

2 Groupe symétrique et groupe diédral

2.1 Groupe symétrique

Définition 2.1. S_n [Ulm] p 41

Proposition 2.1. Engendré par les transpositions [Ulm] p 48

Définition 2.2. Signature [Ulm] p 49

Définition 2.3. Groupe alterné [Ulm] p 50

Proposition 2.2. groupes symétriques alternés engendrés par ... [Ulm] p 52

Définition 2.4. Groupe simple [Ulm] p 52

Proposition 2.3. A_n simple pour $n \geq 5$ [Ulm] [Per]

2.2 Groupes diédraux

Définition 2.5. Groupe diédral [Ulm] p 8

Proposition 2.4. Structure $D_n, n \geq 3$ [Ulm] p 9

Proposition 2.5. Cas $n = 2$ [Ulm] p 9

3 Générateurs du groupe linéaire

3.1 $GL(E)$ et $SL(E)$

Définition 3.1. $GL(E)$ et $SL(E)$ [[Per](#)] p 95

Définition 3.2. *+prop dilatation* [[Per](#)] p 96

Définition 3.3. *+prop transvection* [[Per](#)] p 97

Théorème 3.1. Générateurs de $GL_n(k)$ et $SL_n(k)$ + applications [[FGNb](#)]

Application 3.1. groupes dérivés de $GL(n, k)$ et $SL(n, k)$ [[Per](#)] p 101

Application 3.2. Frobenius Zolotarev [[BMP](#)] p 251

3.2 Groupe orthogonal euclidien

Définition 3.4. $O(n, \mathbb{R})$ et $SO(n, \mathbb{R})$ [[Per](#)] p 141

Définition 3.5. Réflexion et renversement [[Per](#)] p 125

Rq : ce sont des éléments de $O(n, \mathbb{R})$ (on identifie les endomorphismes et les matrices)

Théorème 3.2. $O(n, \mathbb{R})$ engendré par les réflexions [[Per](#)] p 143

Théorème 3.3. $SO(n, \mathbb{R})$ engendré par les renversements [[Per](#)] p 143

Application 3.3. groupes dérivés [[Per](#)] p 144

Application 3.4. $SO(3, \mathbb{R})$ est simple [[Per](#)] p 148 [[FGNc](#)] p 67

3.3 Homographies

Théorème 3.4. centre de $GL(E)$ [[Per](#)] p 98

Définition 3.6. Groupe projectif linéaire [[Per](#)] p 99

Proposition 3.1. $PGL_2(\mathbb{C})$ iso groupe des homographies [[Aud](#)] p 201

Théorème 3.5. Engendré par les similitudes directes et $z \mapsto \frac{1}{z}$ [[Aud](#)] p 201

Corollaire 3.1. Conserver les angles orientés [[Aud](#)] p 201

Développements

- $\mathfrak{A}_n$ est simple
- Générateurs de $GL_n(k)$ et $SL_n(k)$

Références

- Ulmer
- Combes
- Perrin
- X ENS algèbre 2 et 3
- Gourdon algèbre
- OA
- Audin

Leçon 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Rapport du jury

Cette leçon, souvent choisie par les candidats, demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord, n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et, plus généralement, les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Il est nécessaire de bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Et pour les candidats plus étoffés, connaître une généralisation du lemme chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, faisant apparaître le pgcd et le ppcm de ces éléments. Il faut bien sûr savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles, et ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler. Toujours dans le cadre du lemme chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux, de connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents... Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon.

1 Structure de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1.1 Groupe

Définition 1.1. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [RB] p 10

Proposition 1.1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ cyclique et tout groupe cyclique est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [RB] p 10-11

Exemple 1.1. $\mathbb{U}_n$ isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com] p 59

Proposition 1.2. Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [RB] p 11

Exemple 1.2. Sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Proposition 1.3. Quotients [RB] p 12

Rq : on en déduit des morphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

1.2 Anneau

Proposition 1.4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau [RB] p 13

Définition 1.2. Groupe des inversibles [RB] p 13

Proposition 1.5. Caractérisation des inversibles [RB] p 13

Corollaire 1.1. corps ssi n premier [RB] p 13

Définition 1.3. Indicatrice d'Euler (+ carac) [RB] p 14

Exemple 1.3. $\varphi(p^k)$, p premier [RB] p 18

Proposition 1.6. $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [RB] p 14

Corollaire 1.2. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ [RB] p 14

Exemple 1.4. p premier [RB] p 14

1.3 Morphismes

1.3.1 Lemme Chinois

Théorème 1.1. Lemme Chinois [RB] p 16

Corollaire 1.3. Généralisation [RB] p 16

Exemple 1.5. Avec la décomposition en facteurs premiers [RB] p 17

Corollaire 1.4. a eqv b ssi.. [RB] p 17

Exemple 1.6. Classe de x mod 247 [RB] p 17

Corollaire 1.5. Iso entre les groupes des inversibles

Application 1.1. φ est multiplicative [RB] p 18

1.3.2 Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 1.7. Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Per] p 24 ou [RB] (exos)

Proposition 1.8. morphisme de $\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $p|n$ [RB] p 22

1.4 Structure des groupes abéliens finis

Proposition 1.9. et déf : invariants du groupe [Com] p 66,67

Corollaire 1.6. $|G| = p^m$ [Com] p 67

Application 1.2. $\exists$ élément dont l'ordre est le ppcm des ordres de tous les éléments [Com] p 67

2 Applications arithmétiques

2.1 Primalité

Théorème 2.1. *Euler* [RB] p 15

Théorème 2.2. *Petit théorème de Fermat* [RB] p 15

Théorème 2.3. *Wilson* [RB] p 15

Exemple 2.1. *Réciproque de Fermat fausse : nombres de Carmichael* : 561

2.2 Cryptographie

[Goua] p 34

2.3 Résidus quadratiques

Définition 2.1.

Proposition 2.1. *Cardinaux* [RB] p 136

Proposition 2.2. *Critère d'Euler* [RB] p 137

Corollaire 2.1. *Carré ssi ...* [RB] p 137

Application 2.1. ∞ de premiers de la forme $4m+1$ [RB] p 137

Définition 2.2. *Symbole de Legendre ; de Jacobi* [RB] p 138

Lemme 2.1. *Multiplicativité* [RB] p 138

Théorème 2.4. *Valeur quand $p=2$* [RB] p 139

Théorème 2.5. *Loi de réciprocité quadratique* [RB] p 139

Application 2.2. *Frobenius Zolotarev* [BMP]

Application 2.3. Deux carrés [Per]

2.4 Équations diophantiennes

Définition 2.3. *Equation diophantienne* [Com] p 274

Exemple 2.2. *Equation de Fermat, pas de solution pour $n \geq 3$, mais DIFFICILE* [Com] p 275

on peut résoudre certains cas comme $n=4$ ou encore

Théorème 2.6. Sophie Germain [FGNa] p 167

3 Polynômes irréductibles

3.1 Irréductibilité sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Théorème 3.1. *Construction de $\mathbb{F}_q$ comme corps de décomposition* [Per] p 73

Proposition 3.1. *Factorisation de $X^{p^n} - X$* [FG] p 189 (cas $q=p$ premier)

Théorème 3.2. *Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$* [FG] p 189

3.2 Irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Proposition 3.2. *Critère D'Eisenstein* [Per] p 76

Exemple 3.1. $X^{p-1} + \dots + X + 1$ [Per] p 77

Théorème 3.3. *Réduction* [Per] p 77

Exemple 3.2. $X^3 + 462X^2 + \dots$ [Per] p 77

3.3 Polynômes cyclotomiques

Définition 3.1. *Polynômes cyclotomiques* [Per] p 80

Proposition 3.3. $X^n - 1 = \prod \Phi_d$ [Per] p 80

Exemple 3.3. $n=1, 3, \dots$ [Per] p 81

Théorème 3.4. $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et est irréductible [Per] p 82

Développements

- Théorème des deux carrés
- Sophie Germain

Références

- Risler Boyer
- Combes, Algèbre et géométrie
- Perrin
- FGN al 1
- Francinou Gianella
- Gourdon algèbre
- OA

Leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

Rapport du jury

Il s'agit d'une leçon pouvant être abordée à divers niveaux. Il y a tant à dire sur la question que le candidat devra fatalement faire des choix. Attention toutefois à celui des développements, ils doivent être pertinents ; l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant ! La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien sûr pas exigible au niveau de l'agrégation. Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1. Entiers premiers deux à deux ; dans leur ensemble [Goua] p 7

Théorème 1.1. Bézout [Goua] p 8

Théorème 1.2. Gauss [Goua] p 8

Définition 1.2. Nombre premier + exemples [Goua] p 8

Proposition 1.1. Si p ne divise pas a alors premiers entre eux [Goua] p 9

Proposition 1.2. Si p divise produit alors divise l'un [Goua] p 9

Proposition 1.3. $p | C_p^k$ [Goua] p 9

1.2 Factorisation

Proposition 1.4. $|n| \geq 2$ divisible par un nombre premier [Goua] p 9

Théorème 1.3. Fondamental de l'arithmétique [Goua] p 8

Exemple

Application 1.1. Calcul du pgcd et du ppcm [Goua] p 9

Application 1.2. infinité de premiers de la forme $6k - 1$ [Goua] p 12

1.3 Fonctions arithmétiques

Définition 1.3. Indicatrice d'Euler φ + multiplicativité [Demb] p 55

Proposition 1.5. $\varphi(p^s) = p^s - p^{s-1}$ + cas particuliers [Demb] p 55

Corollaire 1.1. $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ [Demb] p 56

Proposition 1.6. $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ [Demb] p 57

Définition 1.4. Fonction de Möbius + multiplicativité [Per] p 89

Théorème 1.4. Formule d'inversion de Möbius + app à φ [Per] p 89

Proposition 1.7. Formule ϕ_n [Per] p 92

1.4 Répartition des nombres premiers

Proposition 1.8. $\mathcal{P}$ est infini

Progression arithmétique :

Théorème 1.5. Dirichlet version faible [Goua] p 92

Théorème 1.6. Dirichlet (ADMIS) [Goua] p 12

Théorème 1.7. Nombres premiers (ADMIS) [Goua] p 14

2 Application à la théorie des groupes

2.1 p -groupes

Définition 2.1. p -groupe + ex : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [Per] p 9

Définition 2.2. groupe de cardinal p cyclique [Per] p 10

Théorème 2.1. Lemme de Cauchy [Per] p 35

Lemme 2.1. Points fixes sous l'action d'un p -groupe [Per] p 17

Théorème 2.2. centre d'un p -groupe [Per] p 16

groupe d'ordre p^2

2.2 Théorèmes de Sylow

Définition 2.3. p -Sylow [Per] p 18

Exemple 2.1. Dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ [Per] p 18

Lemme 2.2. $\exists a \in G, aSa^{-1}H$ p -Sylow [Per] p 19

Théorème 2.3. Sylow 1 + cor [Per] p 18

Théorème 2.4. Sylow + cor (unicité) [Per] p 19

Application 2.1. Groupe d'ordre 63 [Per] p 20

groupes d'ordre pq ?? [Per] p 27

3 Corps finis

3.1 Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Théorème 3.1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ corps ssi n premier [Goua] p 9

Rq : Bézout + Euclide permettent de calculer l'inverse. Exemple ?

Théorème 3.2. Fermat [Goua] p 9

Théorème 3.3. Wilson [Goua] p 9

Théorème 3.4. Sophie Germain [FGNa] p 167

Application 3.1. Chiffrement RSA [Goua] p 35

3.2 Théorie des corps finis

Définition 3.1. Caractéristique d'un corps

Proposition 3.1. corps fini $\Rightarrow$ car = p premier $\Rightarrow$ card p^n

Proposition 3.2. Frobenius [Per] p 73

Théorème 3.5. existence et unicité [Per] p 73

Proposition 3.3. $\mathbb{F}_q^* \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ [Per] p 74

3.3 Carrés dans $\mathbb{F}_q$

Définition 3.2. $\mathbb{F}_q^2$ et $\mathbb{F}_q^{*2}$ [Per] p 74

Proposition 3.4. Caractérisation des carrés [Per] p 75

Proposition 3.5. -1 est un carré ssi [Per] p 75

Théorème 3.6. Deux carrés [Per] p 57

Corollaire 3.1. [Per] p 58

Définition 3.3. Symbole de Legendre [Demb] p 113

Proposition 3.6. Euler [Demb] p 113

Théorème 3.7. Loi de réciprocité quadratique [Demb] p 121 [Goz] p 121

Exemple 3.1. $\left(\frac{41}{17}\right)$ [Goz] p 155

3.4 Polynômes irréductibles

Théorème 3.8. Critère d'Eisenstein [Per] p 76

Exemple 3.2. $X^{p-1} + \dots + X + 1$ [Per] p 77

Théorème 3.9. Réduction dans le cas $m\mathbb{Z}$ [Per] p 77

Exemple 3.3. [Per] p 77

Exemple 3.4. C-ex : si irr dans $\mathbb{Z}$, pas forcément dans $\mathbb{F}_p$ [Per] p 78

4 Primalité en pratique

4.1 Tests de primalité

4.1.1 Algorithme naïf

On fait la division Euclidienne de n par tous les premiers entre 2 et $\sqrt{n}$

4.1.2 Critère de Lehmer

[Demb] p 76

4.2 Miller-Rabin

[Demb] p 68

4.3 Classes de nombres remarquables

Définition 4.1. Nombre de Fermat [Demb] p 80

Proposition 4.1. Critère de Pépin [Demb] p 80

Proposition 4.2. Nombres de Mersenne [Demb] p 81

Développements

- Théorème des deux carrés
- Sophie Germain

Références

- Gourdon algèbre
- Demazure
- Perrin
- Gozard
- Oaux X-ENS algèbre 1

Leçon 123 : Corps finis. Applications.

Rapport du jury

Il s'agit d'une leçon comportant un certain nombre d'attendus. En premier lieu, une construction des corps finis doit être connue. Ensuite, les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers $\mathbb{F}_q$ doivent être connues. Enfin, les applications des corps finis (y compris pour $\mathbb{F}_q$ avec q non premier!) ne doivent pas être oubliées : citons par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité. Il sera bon de comprendre l'utilisation des degrés des extensions, et leurs petites propriétés arithmétiques amenées par le théorème de la base télescopique. Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé. Les applications sont nombreuses. S'ils sont bien maîtrisées, alors les codes correcteurs peuvent être mentionnés.

Cadre : Soit k un corps de cardinal fini.

1 Généralités

1.1 Caractéristique et sous-corps premier

Remarque avec L sous corps de K [Per] p 72

Définition 1.1. Caractéristique d'un corps (fini) [Per] p 72

Proposition 1.1. car nulle ou $= p$ premier [Per] p 72

Remarque : si $\text{car} = 0$, infini donc ici : $\text{car } p$ premier [Per] p 72

Définition 1.2. Sous-corps premier [Per] p 72

Proposition 1.2. k fini de caractéristique p donc son sous corps premier est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [Per] p 72

Proposition 1.3. $\text{CArd } k = p^n$ [Per] p 72

1.2 Morphisme de Frobenius et automorphismes

Définition 1.3. Morphisme de Frobenius [Per] p 73

Proposition 1.4. k fini alors automorphisme ; si $\text{card}(k) = p$ alors identité [Per] p 73

Proposition 1.5. Frobenius [Demb] p 209

Proposition 1.6. automorphismes de k de cardinal p^n [Demb] p 211

1.3 Existence et unicité des corps finis

1.3.1 Existence et unicité par les corps de décomposition

Théorème 1.1. Existence et unicité : $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p/(X^q - X)$; on le note $\mathbb{F}_q$ [Goz] p 85

1.3.2 Construction par les corps de rupture

Théorème 1.2. $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p/(\pi)$ où $\pi \dots$ [Goz] p 87

Exemple 1.1. Construction de $\mathbb{F}_4$ + tables multiplicatives et additives ANNEXE [Goz] p 58

1.3.3 Application : sous corps de $\mathbb{F}_{p^n}$

Théorème 1.3. $\mathbb{F}_{p^s}$ ss corps ssi $s|n$ [Calb] p 58 [Goz] p 91

Exemple 1.2. Sous-corps de $\mathbb{F}_{2^{20}}$ ANNEXE

1.4 Structure de $\mathbb{F}_q^*$

Théorème 1.4. $\mathbb{F}_q^*$

Application :

Théorème 1.5. Élément primitif [Goz] p 84

Exemple 1.3. Si α générateur de $\mathbb{L}^*$, c'est un élément primitif, mais la réciproque est fausse :

$$\mathbb{F}_2/(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

2 Les carrés dans les corps finis

2.1 Définition et caractérisations

Définition 2.1. $\mathbb{F}_q^2 \mathbb{F}_q^{*2}$ [Per] p 74

Proposition 2.1. Cardinaux [Per] p 74

Proposition 2.2. Caractérisation des carrés [Per] p 75

Proposition 2.3. -1 est un carré ssi [Per] p 75

Théorème 2.1. Deux carrés [Per] p 57

Corollaire 2.1. [Per] p 58

2.2 Symbole de Legendre

Définition 2.2. *Symbole de Legendre* [Dem] p 113

Proposition 2.4. *Euler* [Dem] p 113

Proposition 2.5. *multiplicativité* $+ \left(\frac{2}{p}\right)$ [Dem] p 113-119

Théorème 2.2. *Loi de réciprocité quadratique* [Dem] p 121 [Goz] p 121

Exemple 2.1. $\left(\frac{41}{17}\right)$ [Goz] p 155

2.3 Symbole de Jacobi

Définition 2.3. *Jacobi* [Dem] p 122

Remarque : Si m est un carré mod n alors $\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ mais réciproque fautive : $\left(\frac{14}{51}\right)$

3 Polynômes

3.1 Clôture algébrique

Théorème 3.1. *Corps fini jamais algébriquement clos + polynôme* [Cal] p 67

Proposition 3.1. *Clôture algébrique corps fini* [Cal] p 77

3.2 Polynômes irréductibles

Corollaire 3.1. $\exists$ *polynômes de tout degré* [Goz] p 87

Corollaire 3.2. π *irr de degré n sur $\mathbb{F}_p$, corps de rupture et de décomposition $\mathbb{F}_{p^n}$* [Goz] p 87

Exemple 3.1. $\mathbb{F}_4$ [Goz] p 89

Théorème 3.2. *Facteurs irréductibles de $X^{p^n} - X$ + conséquence sur les degrés* [Goz] p 88

Définition 3.1. *Fonction de Möbius* [Goz] p 89

Théorème 3.3. *Formule d'inversion de Möbius* [Goz] p 90

Théorème 3.4. Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ [FG] p 189

3.3 Critères d'irréductibilité

Théorème 3.5. *avec les extensions* [Per] p 78

Exemple 3.2. [Per] p 78

3.3.1 Application à $\mathbb{Z}$

Théorème 3.6. *Réduction dans le cas $m\mathbb{Z}$* [Per] p 77

Exemple 3.3. [Per] p 77

Exemple 3.4. *C-ex : si irr dans $\mathbb{Z}$, pas forcément dans $\mathbb{F}_p$* [Per] p 78

Développements

- Théorème des deux carrés
- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

Références

- Perrin
- Demazure
- Gozard
- Calais, extension de corps et théorie de Galois
- Francinou Gianella

Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Rapport du jury

Le jury attend dans cette leçon un bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition (la preuve de l'unicité de ce dernier n'est pas exigée), ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis). Attention à ne pas croire qu'un polynôme réductible admet forcément des racines (même en dehors du cadre de cette leçon!). Bien entendu, les corps finis ont une place de choix et il sera instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbb{F}_2$, ou $\mathbb{F}_3$. Il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que $\mathbb{C}$; il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Il faut connaître le théorème de la base télescopique ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes.

1 Polynômes irréductibles

Cadre : Soit A un anneau commutatif unitaire et factoriel.

1.1 Définitions, propriétés

Définition 1.1. Polynôme irréductible [Per] p 46

Exemple 1.1. $2X$ réductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

Proposition 1.1. $A[X]$ est factoriel [Per] p 51

Proposition 1.2. degré 1 irr [Goz] p 9

Proposition 1.3. irr deg > 1 alors pas de racine [Goz] p 9

Exemple 1.2. C-ex : pas de racine mais réductible $(X^2 + 1)^2$ [Goz] p 9

Définition 1.2. Contenu [Per] p 51

Proposition 1.4. lemme de Gauss : contenu multiplicatif [Per] p 51

1.2 Critères d'irréductibilité

Proposition 1.5. pas de racine, deg 2 ou 3 alors irréductible [Goz] p 9

Théorème 1.1. Irréductible de $A[X] = K[X]$ primitif [Per] p 51

Théorème 1.2. Critère d'Eisenstein [Per] p 76

Application 1.1. p premier, $X^{p-1} + \dots + X + 1$ irr dans $\mathbb{Z}[Per]$ p 77

Proposition 1.6. Critère de réduction [Per] p 77

Exemple 1.3. C-ex : $2X$ dans $\mathbb{Z}$. [Per] p 77

Exemple 1.4. [Per] p 77

2 Adjonction de racines

Cadre : Soit k un corps commutatif

2.1 Extension de corps, éléments algébriques

Définition 2.1. Extension de corps [Per] p 75

Exemple 2.1. $\mathbb{C}$ extension de $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ extension de $\mathbb{Q}$

Tout corps est extension de son sous corps premier [Goz] p 21

Proposition 2.1. L extension de K alors L est un K -ev [Per] p 65

Sa dimension est le degré de l'extension

Théorème 2.1. Base télescopique [Per] p 65

Corollaire 2.1. Multiplicativité du degré

Définition 2.2. Transcendants et algébriques [Per] p 66

Exemple 2.2. $\exp$ et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ ADMIs [Per] p 66

Exemple 2.3. [Per] p 66

Théorème 2.2. Caractérisation d'un élément algébrique + csce sur le degré [Per] p 66

Définition 2.3. Extension algébrique [Per] p 67

Remarque : Toute extension finie est algébrique

2.2 Corps de rupture

Définition 2.4. Corps de rupture [Per] p 70

Exemple 2.4. $\mathbb{C}$ est le corps de rupture de $X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ [Per] p 70

Théorème 2.3. P irréductible, alors corps de rupture existe + unicité [Per] p 70

2.3 Corps de décomposition

Définition 2.5. Corps de décomposition [Per] p 71

Théorème 2.4. il existe un corps de décomposition + unicité [Per] p 71

Exemple 2.5. ex [Per] p 72

Application 2.1. $q = p^n$ Corps à q éléments : $E + U$ [Per] p 73

2.4 Clôture algébrique

Définition 2.6. Corps algébriquement clos [Goz] p 62

Proposition 2.2. Alg clos alors infini [Goz] p 62

Exemple 2.6. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ [Goz] p 62

Théorème 2.5. d'Alembert Gauss [Goz] p 62

Corollaire 2.2. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ [Goz] p 63

Définition 2.7. Clôture algébrique [Goz] p 63

Exemple 2.7. $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$ [Goz] p 63

Théorème 2.6. Steinitz [Goz] p 63

Remarque : autre démonstration de l'existence du corps de décomposition [Goz] p 65

3 Polynômes cyclotomiques

On se place dans $\mathbb{C}$

Définition 3.1. Racine primitive n -ième de l'unité [Goz] p 67

Proposition 3.1. Card des racines primitives n -ièmes $= \phi(n)$ [Goz] p 67

Définition 3.2. Corps cyclotomique [Goz] p 67

Exemple 3.1. quelques polynômes cyclotomiques [Goz] p 77

Proposition 3.2. $\prod \dots = X^n - 1$ [Goz] p 68

Proposition 3.3. $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ [Goz] p 69

Corollaire 3.1. Polynôme minimal d'une racine primitive [Goz] p 69 (gourdon p 91 ?)

Application 3.1. Dirichlet version faible [Goz] p 84 (Gourdon p 92 ?)

4 Corps finis

Théorème 4.1. Rappel : p premier ; $q = p^n$; corps à q éléments [Goz] p 87

Corollaire 4.1. $\exists$ polynômes de tout degré [Goz] p 87

Corollaire 4.2. π irr de degré n sur $\mathbb{F}_p$, corps de rupture et de décomposition $\mathbb{F}_{p^n}$ [Goz] p 87

Exemple 4.1. $\mathbb{F}_4$ [Goz] p 89

Théorème 4.2. Facteurs irréductibles de $X^{p^n} - X$ + conséquence sur les degrés [Goz] p 88

Définition 4.1. Fonction de Möbius [Goz] p 89

Théorème 4.3. Formule d'inversion de Möbius [Goz] p 90

Théorème 4.4. Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ [FG] p 189

Développements

- Dénombrement des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$
- Les polynômes cyclotomiques sont irréductibles

Références

- Perrin, Cours d'algèbre
- Gozard, Théorie de Galois
- Francinou Gianella

Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Rapport du jury

Cette leçon demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action, on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre part des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres, ainsi que les adhérences d'orbites, lorsque la topologie s'y prête.

On pourra aussi travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

On étudie des résultats d'algèbre linéaire classiques comme la réduction d'endomorphismes ou la topologie matricielle, mais vus sous l'angle d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

1 Actions par translation

1.1 GL_n sur M_{nm} à gauche

Définition 1.1. Action à gauche par multiplication [CG] p 62

Rq : ça revient à agir sur les lignes

Définition 1.2. Matrice échelonnée [CG] p 130

Exemple 1.1. [CG] p 130

Théorème 1.1. Noyau + forme normale échelonnée [CG] p 131

Rq : forme normale échelonnée : c'est l'application du pivot de Gauss [CG] p 131

Application 1.1. Résolution de systèmes linéaires [CG] p 128

1.2 GL_n sur M_{mn} à droite

Définition 1.3. Action par multiplication à droite [CG] p 133 *Attention ! Ne pas oublier le $^{-1}$!!!!!*

Rq : ça revient à agir sur les colonnes !

Théorème 1.2. Image + forme normale échelonnée [CG] p 133

Application 1.2. Calcul du rang

1.3 Action de OnR et UnC

On regarde les actions par translation à gauche sur les symétriques/hermitiennes [CG] p 202

Théorème 1.3. Décomposition polaire [CG] p 202

2 Action de Steiniz

Définition 2.1. Action de $GL_n \times GL_m$ sur $M_{m,n}$ par équivalence [CG] p 4

Il s'agit d'un changement de base au départ ET à l'arrivée pour un endomorphisme

2.1 Rang

Théorème 2.1. Invariant = rang [CG] p 5

Corollaire 2.1. Forme normale $I_{m,n,r}$ [CG] p 5

Corollaire 2.2. Théorème du rang [CG] p 3

Application 2.1. Nombre de matrices de rang r [CG] p 9

Application 2.2. $rg(A) = rg(A^t)$ [BMP] p 155

Application 2.3. Indépendance vis à vis du corps de base [BMP] p 156

2.2 Topologie

Proposition 2.1. Densité de $GL_n(K)$ dans $M_n(K)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [BMP] p 155

Proposition 2.2. $\overline{O_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$ [CG] p 9

Corollaire 2.3. Orbite minimale et maximale [CG] p 11

Corollaire 2.4. Limite et semi continuité [CG] p 11

3 Action par conjugaison

Définition 3.1. Action par conjugaison [CG] p 62

Rq : classe de similitude, matrices semblables.

3.1 Action sur DnC

Théorème 3.1. Semblables ssi mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités [CG] p 84

Proposition 3.1. Le polynôme caractéristique est un invariant total [CG] p 85

Corollaire 3.1. Donc la trace, le déterminant et le polynôme minimal sont des invariants [CG] p 85

Exemple 3.1. Pas totaux, ex avec Π [CG] p 85

Proposition 3.2. diag ssi son orbite est fermée [CG] p 86

3.2 Action sur MnK : trigonalisation

Seulement si on sait calculer sur des exemples

Théorème 3.2. *Décomposition de Jordan sur des nilpotents* [Goua] p 197

Théorème 3.3. *Décomposition de Jordan cas général* [Goua] p 199

Application 3.1. *Trigonalisation dans le cas d'un corps algébriquement clos*

Application 3.2. *CNS M et $2M$ semblables* [Goua] p 201

3.3 Action sur MnK : invariants de similitude

Théorème 3.4. *Invariants de similitude* [Goua] p 290

Définition 3.2. *Matrice compagnon* [Goua] p 177

Théorème 3.5. *Décomposition de Frobenius* [Goua] p 291

Application 3.3. *On retrouve Jordan; semblables ssi mêmes invariants de similitude* [Goua] p 291

3.4 Action de OnR

Rappeler l'action

Proposition 3.3. Réduction des endomorphismes normaux [Goua] p 260

Corollaire 3.2. *Réduction des matrices réelles antisymétriques* [Goua] p 261

Proposition 3.4. *Réduction des matrices réelles symétriques* [Goua] p 240

4 Action par congruence

Définition 4.1. *Action de congruence* [CG] p 150

Rq : deux matrices congruentes définissent la même forme quadratique à changement de base près [CG] p 150

Définition 4.2. *nouvel invariant p*

Théorème 4.1. *Invariants dans les cas réel et complexe* [CG] p 151

Théorème 4.2. *Reformulation : Inertie de Sylvester* [CG] p 181 (Forme normale)

Lemme 4.1. *Réduction des formes quadratiques* [Rou]

Théorème 4.3. *Lemme de Morse*

Théorème 4.4. Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ [Ale]

Développements

- Réduction des endomorphismes normaux
- Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Références

- H2G2
- Gourdon algèbre
- OA
- Rouvière
- Alessandri

Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Rapport du jury

Dans cette leçon, il est important de bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier, ce qui rend la leçon plus difficile qu'on ne le croit. Des questions élémentaires comme "un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie?" peuvent dérouter un candidat. Les diverses caractérisations du rang trouvent bien leur place ainsi que, pour les candidats plus chevronnés, l'utilisation du degré d'une extension dans la théorie des corps.

Soit K un corps.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Familles libres, familles génératrices et bases

Définition 1.1. Famille génératrice [Gri] p 10

Exemple 1.1. Famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ [Gri] p 10

Définition 1.2. Famille libre, famille liée [Gri] p 11

Exemple 1.2. dans $\mathbb{R}^3$ [Gri] p 11

Proposition 1.1. caractérisation des familles libres [Gri] p 12

Proposition 1.2. famille libre = décomposition unique [Gri] p 12

Définition 1.3. Base [Gri] p 13

Proposition 1.3. caractérisation des bases et bijection avec K^n [Gri] p 13

Exemple 1.3. base canonique de K^n [Gri] p 13

Proposition 1.4. Sur les familles libres, liées et génératrices [Gri] p 14

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 1.4. Espace de dimension finie [Gri] p 11

Soit E un espace de dimension finie ; Soit G une famille génératrice de E .
Rq : G contient des familles libres [Gri] p 15

Théorème 1.1. De toute famille génératrice on peut extraire une base [Gri] p 16

Théorème 1.2. Base incomplète [Gri] p 16

Théorème 1.3. et définition de la dimension [Gri] p 17

Corollaire 1.1. familles liées et génératrices [Gri] p 18

Proposition 1.5. Dimension du produit d'espaces [Gri] p 18

Théorème 1.4. Famille libre, génératrice à n éléments = base [Gri] p 19

Exemple 1.4. Base de $\mathbb{R}_n[X]$ [Gri]

Application 1.1. Preuve par récurrence sur la dimension :
Réduction des endomorphismes normaux [Goua]

1.3 Sous-espace vectoriel

Proposition 1.6. Sous-espace et dimension [Gri] p 19

Définition 1.5. Somme de sous-espaces [Gri] p 21

Proposition 1.7. et déf : somme directe [Gri] p 22

Proposition 1.8. Caractérisation somme directe par les bases [Gri] p 22

Définition 1.6. Espaces supplémentaires [Gri] p 22

Corollaire 1.2. Pas unicité du supplémentaire mais unicité de sa dimension [Gri] p 22

Théorème 1.5. Caractérisation supplémentaires [Gri] p 23

Exemple 1.5. Dans $\mathbb{R}^3$, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ [Gri] p 23

Proposition 1.9. dimension de la somme d'espaces vectoriels [Gri] p 24

1.4 Dimension et application linéaire

Proposition 1.10. image d'une famille libre/ génératrice par une application injective/surjective [Gri] p 61

Théorème 1.6. Espaces isomorphes ssi de même dimension [Gri] p 61

2 Applications linéaires en dimension finie, rang

2.1 Définitions et théorème du rang

Définition 2.1. Rang d'une application linéaire [Gri] p 61

Théorème 2.1. du rang [Gri] p 62

Application 2.1. Projecteur [Gri] p 90

Corollaire 2.1. Mêmes dimensions : inj ssi surj ssi bij [Gri] p 63

Exemple 2.1. C-ex en dim infinie [Gri] p 63

Application 2.2. Polynômes interpolateurs de Lagrange [BMP] p 154

Définition 2.2. rang d'une famille de vecteurs ; d'une matrice [Gri] p 80

Proposition 2.1. rang d'un endo et d'une matrice associée [Gri] p 80

2.2 Calcul du rang

Théorème 2.2. M équivalente à J_r [Goua] p 122

Corollaire 2.2. Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang [Goua] p 122

Définition 2.3. Matrice extraite [Goua] p 122

Théorème 2.3. Rang et matrices extraites [Goua] p 122

Corollaire 2.3. rang de la transposée [Gri] p 81

Théorème 2.4. Opérations élémentaires sur une famille de vecteurs [Goua] p 122

Application 2.3. Calcul du rang

Exemple 2.2. Calcul de rang [Goua] p 122

2.3 Formes linéaires et dualité

Définition 2.4. Forme linéaire et dual [Gri] p 82

Exemple 2.3. La différentielle d'une application à valeurs dans K est une forme linéaire sans ref ?

Application 2.4. extremums liés [Goub] p 317

Proposition 2.2. Noyau = hyperplan [Gri] p 82

Proposition 2.3. E et son dual sont isomorphes (dim finie) [Gri] p 83

Théorème 2.5. Base duale [Gri] p 83

Exemple 2.4. dans $\mathbb{R}^3$ [Gri] p 84

Définition 2.5. bidual [Gri] p 86

Proposition 2.4. E^{**} est canoniquement iso à E [Gri] p 86

3 Extension de corps

Définition 3.1. Extension de corps [Per] p 65

Exemple 3.1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ [Per] p 65

Proposition 3.1. L est un K -ev [Per] p 65

Définition 3.2. Degré [Per] p 65

Théorème 3.1. Base télescopique + multiplicativité du degré [Per] p 65

Définition 3.3. Élément algébrique, polynôme minimal [Per] p 66

Proposition 3.2. algébrique ssi dim finie [Per] p 66

Développements

- Extremums liés
- Réduction des endomorphismes normaux

Références

- Grifone
- Gourdon an
- Gourdon al
- Perrin
- OA

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Rapport du jury

Il s'agit encore d'une leçon où les résultats abondent et où le candidat devra faire des choix. On doit pouvoir, dans cette leçon, commencer par définir correctement le déterminant. Beaucoup de candidats entament la leçon en disant que le sous-espace des formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer. Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée.

L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. Le calcul explicite est important, toutefois, le jury ne peut se contenter que d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! De même il est envisageable que des candidats s'intéressent aux calculs de déterminant sur $\mathbb{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.

Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomial.

Cadre : E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , $\mathbb{K}$ un corps

1 Le déterminant

1.1 Définition et premières propriétés

1.1.1 Famille de vecteurs

Théorème 1.1. *{Formes n -linéaires alternées} de dim 1* [Goua] p 135

Définition 1.1. *Déterminant* [Goua] 135

Application 1.1. *Ex 10* [Goua] p 145 **ECRIRE**

Proposition 1.1. *Changement de base* [Goua]

Théorème 1.2. *CNS sur les familles liées* [Goua]

1.1.2 Déterminant d'endomorphisme

Définition 1.2. *Déterminant d'endomorphisme* [Goua]

Proposition 1.2. *Composée, identité, inverse* [Goua]

Application 1.2. *$SL(E)$ sous groupe distingué de $GL(E)$* [Szp] p 296

1.1.3 Déterminant d'une matrice

Définition 1.3. *Déterminant d'une matrice carrée* [Goua]

+ notation

Proposition 1.3. *transposée, endo et matrice, produit* [Goua]

1.2 Calcul du déterminant

1.2.1 Développement en lignes/colonnes

Définition 1.4. *Mineur cofacteur* [Goua]

Proposition 1.4. *Développement selon une ligne, une colonne* [Goua]

Définition 1.5. *Comatrice* [Goua]

Proposition 1.5. *Formule de la comatrice* [Goua]

Exemple 1.1. *App à la dim 2* [Goua]

1.2.2 Élimination de Gauss

Proposition 1.6. *Operations sur les lignes et colonnes* [Goua]

Proposition 1.7. *Déterminant par blocs* [Goua]

Rq : on se ramène par l'algorithme de gauss au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire **Trouver des exemples!!!**

1.2.3 Déterminants particuliers

Application 1.3. *Van der Monde* [Goua]

Application 1.4. *Cauchy* [Goua]

Application 1.5. *Déterminant circulant* [Goua]

2 Applications en algèbre et géométrie

2.1 Systèmes linéaires

Définition 2.1. *Système de Cramer* [Goua]

Proposition 2.1. *Unique solution + formule*

Définition 2.2. *Déterminant, équations et inconnues principal(es)* [Goua]

Théorème 2.1. *Rouché fontené* [Goua]

Exemple 2.1. [Gri] p 147

2.2 Polynôme caractéristique

Définition 2.3. *Polynôme caractéristique (évalué en $\lambda, \forall \lambda$)* [Goua]

Proposition 2.2. *vp ssi racine* [Goua]

Exemple 2.2. *Matrice compagnon* [Goua]

Application 2.1. *Cayley-Hamilton* [Goua]

2.3 Géométrie

2.3.1 Volume

Proposition 2.3. *Volume du parallélépipède* [BMP] p 184

Exemple 2.3. *Aire d'un triangle* [Gri] p 137

Proposition 2.4. *Hadamard* [BMP] p 184

2.3.2 Distance d'un point à un sous-espace

Dans le cas pré hilbertien réel

Définition 2.4. *Matrice et déterminant de Gram* [BMP] p 185

Proposition 2.5. *Distance d'un point à un sev* [BMP] p 185

Proposition 2.6. *Pd scalaire réel canonique : carré du volume* [BMP] p 185

2.3.3 Orientation

Définition 2.5. *Même orientation* [Gri] p 132

Définition 2.6. *Classes d'orientation, orientation positive* [Gri] p 132

Exemple 2.4. *Base canonique* [Gri] p 133

2.4 Réciprocité quadratique

Définition 2.7. *Symbole de Legendre* [Per]

Théorème 2.2. [Frobenius Zolotarev] [BMP] p 251

Application 2.2. *calcul de $\left(\frac{2}{p}\right)$*

3 Applications en analyse

3.1 Régularité

Proposition 3.1. *polynomial, C^∞ , différentielle* [Goub] p 312

Application 3.1. *Trouver des applications !!!!!!!*

GL_n ouvert, dense ; $GL_n(\mathbb{C})$ connexe mais pas $GL_n(\mathbb{R})$

3.2 Changement de variable

Définition 3.1. *Jacobien* [Goub] p 334

Théorème 3.1. *Changement de variables* [Goub] p 335

Exemple 3.1. *Jacobien passage en coordonnées polaires* [Goub] p 335

Application 3.2. [John Loewner] [FGNc] p 229

Développements

- John Loewner
- Frobenius Zolotarev

Références

- Gourdon algèbre
- Szpirglas
- Grifone
- OA
- Gourdon analyse

Leçon 153 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Rapport du jury

Cette leçon est souvent choisie pour son lien avec la réduction, toutefois, le jury ne souhaite pas que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $K[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect applications est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, rappelons que pour calculer A^k , il n'est pas nécessaire en général de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).

AJOUTER DES EXEMPLES!!!!

Soit K un corps commutatif, soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme u de $\mathcal{L}_K(E)$. On identifiera u et sa matrice associée M_u (dans une base déterminée ?).

1 Polynôme d'endomorphisme

1.1 Algèbre $K[u]$

Définition 1.1. Polynôme en l'endomorphisme u [Goua] p 174

Définition 1.2. Morphisme d'évaluation (morphisme d'algèbre) et algèbre $K[u]$ [BMP] p 161

Proposition 1.1. $K[u]$ ss-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ [Goua] p 174

Proposition 1.2. $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ stables par u [Gogb] p 278

Théorème 1.1. Décomposition des noyaux [Goua] p 175

Exemple 1.1. Projecteur (PAS en caractéristique 2) Référence ? ?

1.2 Polynôme annulateur, polynôme minimal

Proposition 1.3. Idéal des polynômes annulateurs [BMP] p 161

Définition 1.3. polynôme minimal ($k[X]$ principal) [BMP] p 161

Théorème 1.2. $K[u] = K[X]/(\pi_u)$ + lemme chinois [BMP] p 161

Exemple 1.2. Projecteur Référence ? ?

Théorème 1.3. Dimension + Base de $K[u]$ [Gogb] p 272

Proposition 1.4. $\pi_{u|_F} | \pi_u$ [BMP] p 161

Proposition 1.5. $E = F \oplus G$ alors $\pi_u = \operatorname{ppcm}(\pi_{u|_F}, \pi_{u|_G})$

Proposition 1.6. si λ valeur propre, $P(\lambda) = 0$ [Goua] p 174

Exemple 1.3. Réciproque fausse [Goua] p 175

Proposition 1.7. λ vp ssi $\pi_u(\lambda) = 0$ [Goua] p 176

1.3 Polynôme caractéristique

Définition 1.4. Polynôme caractéristique [BMP] p 163

Théorème 1.4. Les valeurs propres sont les racines de χ_u [BMP] p 163

Exemple 1.4. projecteur

Théorème 1.5. Cayley Hamilton [BMP] p 163

Corollaire 1.1. $\pi_u | \chi_u$ et $\deg \pi_u \leq n$

Application 1.1. u nilpotent ssi $\chi_u = (-1)^n X^n$ [Goua] p 178

Théorème 1.6. λ valeur propre ssi $\chi_u(\lambda) = 0$ [Gogb] p 284

Proposition 1.8. $\chi_{u|_F} | \chi_u$ [Gogb] p 287

Application 1.2. $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$ [Gogb] p 290

2 Un outil pour la réduction

2.1 Critères de diagonalisation

Théorème 2.1. CNS de diagonalisation [BMP] p 165

Exemple 2.1. Projecteur et symétrie [BMP] p 166

Proposition 2.1. Cas d'un corps fini [BMP] p 166 [Goua] p 178

Application 2.1. Théorème de Burnside [FGNb] p 185

2.2 Critères de trigonalisation

Théorème 2.2. *CNS de trigonalisabilité* [BMP] p 166

Proposition 2.2. *Trigonalisabilité automatique* [BMP] p 166

2.3 Décomposition de Dunford

Théorème 2.3. *Décomposition de Dunford* [Goua] p 195 (preuve avec endo en u)

Exemple 2.2. *matrice triangulaire ?*

Exemple 2.3. *Piège* [BMP] p 164

Application 2.2. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective [Gogb] p 331

2.4 Endomorphismes normaux

Ici E est hermitien

Définition 2.1. *Endomorphisme normal* [Goua] p 258

Théorème 2.4. *Réduction des endomorphismes normaux* [Goua] p 260

Application 2.3. *Réduction des matrices symétriques et anti-symétriques réelles*

3 Applications

3.1 Calcul des puissances

[Merb] p 88 en faisant la DE de X^n par χ_u pour se ramener à des puissances inférieures

Exemple 3.1. [Merb] p 88

3.2 Calcul de l'inverse

[Merb] p 93 + Exemple

3.3 Calcul de l'exponentielle

Définition 3.1. *exponentielle matricielle* [Merb] p 255

Proposition 3.1. $\exp A$ est un polynôme en A [Merb] p 256

Décomposition de Dunford de l'exponentielle [BMP] p 164 + limites

Application 3.1. *Résolution d'équation différentielle* [Merb] p 264

Développements

- Réduction des endomorphismes normaux
- Décomposition de Dunford

Références

- OA
- Gourdon algèbre
- Cagnet, algèbre linéaire
- Méthodix algèbre

Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Rapport du jury

Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan, à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée).

Deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables, mais une grande proportion de candidats pensent à tort que la réciproque est vraie.

Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadratiques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

On peut se placer dans le cas $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$? Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n .

1 Résultats préliminaires

Définition 1.1. Sous-espace propre [Goua] p 161

Définition 1.2. Polynôme caractéristique, polynôme minimal [Goua] p 162,176

Proposition 1.1. valeur propre ssi racine de χ_u ssi racine de π_u [Goua] p 162,176

Théorème 1.1. Décomposition des noyaux [Goua] p 175

Théorème 1.2. Cayley Hamilton [Goua] p 176

Proposition 1.2. Si F sev stable par u alors $\chi_{u|_F} | \chi_u$ et $\pi_{u|_F} | \pi_u$ [Goua] p 163,176

2 Endomorphismes trigonalisables

2.1 Définition et caractérisations

Définition 2.1. Endomorphisme, matrice trigonalisable [Goua] p 164

Théorème 2.1. Trig ssi polynôme caractéristique scindé [Goua] p 164 + autres caractérisations [BMP] p 166

Exemple 2.1. Exo 1 [Goua] p 166

Proposition 2.1. Restriction à un sev stable [Goua] p 165

Corollaire 2.1. K alg clos $\Rightarrow$ trigonalisable [Goua] p 165

Exemple 2.2. $C\text{-ex} : \mathbb{R} \chi = X^2 + 1$ sans ref

Proposition 2.2. Spectre [BMP] p 166

Proposition 2.3. $\det(\exp A) = \exp \text{Tr}(A)$ [Goua] p 186

2.2 Trigonalisation simultanée

Proposition 2.4. Si deux endo commutent : stabilités [Goua] p 166

Théorème 2.2. Trigonalisation simultanée [Goua] p 176

Corollaire 2.2. Dans le cas d'une famille d'endomorphismes [Goua] p 171

Corollaire 2.3. Si les endo commutent, alors leur somme est trig [BMP]

Exemple 2.3. $C\text{-ex}$: la réciproque du théorème est fausse!!!! $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sans ref!!

2.3 Propriétés topologiques

Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 2.2. $\mathcal{T}_n \mathcal{D}_n \mathcal{C}_n$ [BMP] p 178

Proposition 2.5. Inclusions [BMP] p 178

Proposition 2.6. adhérence et intérieur [BMP] p 178

Rq : distinction des cas réel ou complexe [BMP] p 179

Proposition 2.7. Nature topologique de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ [BMP] p 179

3 Endomorphismes nilpotents

3.1 Définition et caractérisations

Définition 3.1. Endomorphisme nilpotent [BMP] p 168

Exemple 3.1. [BMP] p 168

Définition 3.2. Indice de nilpotence [BMP] p 170

famille libre [Goua] p 149 ???

Proposition 3.1. Caractérisation [BMP] p 170

Rq : indice de nilpotence $\leq n$

Exemple 3.2. *C-ex : valeurs propres nulles mais pas nilpotent* [BMP] p 170

Proposition 3.2. *Caractérisation avec la trace en caractéristique nulle* [BMP] p 170

Exemple 3.3. *C-ex : trace de I_p^k en car p* Sans ref!

Application 3.1. Théorème de Burnside [FGNb]

3.2 Structure de l'ensemble des nilpotents

Exemple 3.4. *C-ex : la somme de 2 nilpotents ne l'est pas forcément* [BMP] p 168

Proposition 3.3. *Structure de cône* [BMP] p 168

Exemple 3.5. *Cas de la dimension 2* [BMP] p 168

Proposition 3.4. *Somme et composition quand les endo commutent* [BMP] p 169

Proposition 3.5. *Espace vectoriel engendré par les nilpotents* [BMP] p 169

4 Application à la réduction

4.1 Noyaux itérés

Définition 4.1. *Sous-espace caractéristique* [Goua] p 191

Proposition 4.1. *sur les sous espaces caractéristiques* [Goua] p 192

Rq : matrice de f dans une bonne base Sans ref!

Définition 4.2. *Indice d'un endomorphisme* [Goua] p 192

Proposition 4.2. *Caractérisation de l'indice* [Goua] p 192

Proposition 4.3. *Si f nilpotent, c'est = à l'indice de nilpotence* [Goua] p 192

Théorème 4.1. *sur le polynôme minimal* [Goua] p 192

4.2 Dunford

Théorème 4.2. Décomposition de Dunford [Goua] p 193 [BMP] p 163

Application 4.1. *Calcul de l'exponentielle* [BMP] p 164

Développements

- Burnside
- Dunford

Références

- OA
- Gourdon algèbre
- Grifone (pour plus d'exemples)
- Orlaux X-ENS algèbre 2

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Rapport du jury

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon : celle-ci permet de créer une correspondance féconde entre un morphisme et son morphisme transposé, un sous-espace et son orthogonal (canonique), les noyaux et les images, les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique, analytique, etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

Cadre : Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie, où k est un corps commutatif.

1 Forme linéaire et hyperplan

1.1 Formes linéaires

Définition 1.1. *Forme linéaire, dual + notation* [Goua] p 126

Exemple 1.1. $\left(\text{Forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(k) + \text{app1} \right)_1$ [FGNa] p 329

Proposition 1.1. *Une forme linéaire est soit nulle soit surjective* [Goua] p 132

Proposition 1.2. $\ker v \subset \ker u \Leftrightarrow u = \lambda v$ [Gogb] p 92

Théorème 1.1. *Représentation de Riesz* [BMP] p 103

1.2 Hyperplans

Définition 1.2. H hyperplan ssi $\dim H = n - 1$ [Goua] p 114

Proposition 1.3. *noyau d'une forme linéaire non nulle* [Goua] p 129

Exemple 1.2. *Droite dans $\mathbb{R}^2$; plan dans $\mathbb{R}^3$*

Exemple 1.3. $\left(\text{Tout hyperplan de } \mathcal{M}_n(k) \text{ coupe } GL_n(k) \right)_2$ [FGNa] p 131

Hahn Banach ? Sylvester ?

2 Dualité et orthogonalité

2.1 Dual

Définition 2.1. *Forme linéaire coordonnée* [Goua] p 127

Théorème 2.1. *Base duale* [Goua] p 127

Rq : faux en dimension infinie [Goua] p 127

Exemple 2.1. *base duale d'une base de $\mathbb{R}^3$* [Gri] p 84

Exemple 2.2. $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ surj ssi φ_i linéairement indépendantes [Goua] p 131

2.2 Bidual

Définition 2.2. *Bidual* [Goua] p 126

Théorème 2.2. $f : E \rightarrow E^{**}$ isomorphisme [Goua] p 127

Rq : Cet isomorphisme est Canonique (celui $E \rightarrow E^*$ dépend du choix d'une base) [Goua] p 127

Proposition 2.1. *Base antéduale* [Goua] p 127

Exemple 2.3. *dans $\mathbb{R}^3$* [Goua] p 131

2.3 Orthogonalité

Définition 2.3. *Orthogonalité* [Goua] p 128

Exemple 2.4. *Orthogonal de $\{\varphi\}$ est $\ker \varphi$* [Goua] p 128

Proposition 2.2. *Inclusions* [Goua] p 128

Théorème 2.3. *Dimensions* [Goua] p 128

Corollaire 2.1. *Équation d'un sev* [Goua] p 128

Exemple 2.5. [Gri] p 88

Proposition 2.3. *Sommes et intersections* [Goua] p 129

Proposition 2.4. *Orthogonal d'un hyperplan* [Goua] p 129

3 Applications

3.1 Application transposée

Définition 3.1. *Transposée* [Goua] p 129

Proposition 3.1. *rg, im, ker ..* [Goua] p 129

Proposition 3.2. ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$ [Goua] p 130

Proposition 3.3. *stabilité* [Goua] p 130

Application 3.1. *Trigonalisation* [Goua] p 164-166

3.2 Générateurs du groupe linéaire

Définition 3.2. *Dilatation* [Per] p 96

Définition 3.3. *Transvection* [Per] p 97

Théorème 3.1. *Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$* [Per] p 99

3.3 Théorème des extremums liés

Proposition 3.4. *La différentielle d'une fonction $f : E \rightarrow k$ est une forme linéaire*

Théorème 3.2. extremums liés [Goub]

Rq : interprétation géométrique [BMP] p 20

Exemple 3.1. *C-ex : si les Dg_i ne sont pas linéairement indépendants* [BMP] p 21

Application 3.2. *Diagonalisation des endomorphismes symétriques* [BMP] p 21

Application 3.3. *Inégalité de Hadamard* [Rou] p 410

Application 3.4. *Inégalité arithmético géométrique* [Goub] p 319

Développements

- Dual de $\mathcal{M}_n(k)$
- Extremums liés

Références

- OA
- Gourdon algèbre
- Cognet, Algèbre linéaire
- Oaux X-ENS algèbre 1
- Grifone, algèbre linéaire
- Perrin
- Rouvière

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Rapport du jury

Il semble que cette leçon soit moins choisie par les candidats depuis l'ajout de l'aspect algorithmique dans l'intitulé. A ce sujet, il faut savoir que les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus.

La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité!).

Pour les candidats chevronnés, les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ donnée par $p \mapsto Aq$ $\mathbb{P}^n$ $\mathbb{P}^n$.

Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.

Des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbb{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon.

On se place dans un corps K commutatif.

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Système d'équations linéaires* [Gri] p 37

Définition 1.2. *Solution et système compatible* [Gri] p 141

Rq : écriture matricielle [Gri] p 141

Définition 1.3. *Rang du système* [Gri]

Exemple 1.1. *Un système compatible, un non; sans ref*

Proposition 1.1. *compatible ssi b engendré par les vecteurs colonnes* [Gri] p 142

Rq : chercher une solution au système revient à chercher l'intersection d'hyperplans de K^n

1.2 Système de Cramer

Définition 1.4. *Système de Cramer*

Théorème 1.1. *Cramer* [Gri] p 143

Exemple 1.2. [Gri] p 144

Rq : complexité $O((n+2)!) [Cia]$ p 80

1.3 Système de Rouché-Fontené

Théorème 1.2. *Rouché Fontené* [Gri] p 146

Exemple 1.3. [Gri] p 147

2 Méthodes de résolution directe

2.1 Opérations élémentaires et matrices échelonnées

Définition 2.1. *Matrice de transvection + description* [BMP] p 186

Définition 2.2. *Matrice de dilatation + description* [BMP] p 187

Définition 2.3. *Matrice de transposition + description* [BMP] p 187

Proposition 2.1. *Les opérations élémentaires décrites ci dessus ne changent pas l'ensemble des solutions* [Gri] p 37

Définition 2.4. *pivot, matrice échelonnée* [Gri] p 39 [CG] p 130

Rq : toute matrice peut se mettre sous forme échelonnée.

2.2 Méthode de Gauss

Proposition 2.2. *Description de la méthode de Gauss (grandes étapes + description de la première itération)* [Cia] p 73

Proposition 2.3. *Complexité* [Cia] p 80

Application 2.1. *Calcul du rang, résolution de système, calcul de l'inverse, familles de vecteurs, générateurs de GL et SL ...* [CG] p 18 (faire le tri)

Application 2.2. Génération du groupe linéaire [FGNa]

2.3 Décomposition LU et de Choleski

Théorème 2.1. *Factorisation LU* [Gri] p 363

Rq sur la condition initiale [Gri] p 363

Intérêt : on est ramené à deux systèmes triangulaires [Gri] p 363

Théorème 2.2. *Factorisation de Choleski* [Gri] p 363

Exemple 2.1. [Gri] p 364

3 Méthodes de résolution itérative

3.1 Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation

Description générale de la méthode itérative [Cia] p 95

Théorème 3.1. *CNS de convergence* [Cia] p 96

Description de la méthode [Cia] p 98

Décomposition $A = D - E - F$ [Cia] p 98

Définition 3.1. *Tableau des méthodes* [Cia] p

Théorème 3.2. *CS de rayon spectral < 1* [Cia] p 102

Théorème 3.3. *CS de convergence de la méthode de relaxation* [Cia] p 103

3.2 Gradient à pas optimal

Théorème 3.4. Méthode du gradient à pas optimal [HU]

Développements

- Génération du groupe linéaire
- Gradient à pas optimal

Références

- Grifone, algèbre linéaire
- Ciarlet
- OA
- H2G2
- Hirriart Urruty

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Rapport du jury

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur les corps des complexes et sur les corps finis et il faut savoir les classer. On ne doit pas oublier l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener). L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé.

Cadre : Soit K un corps quelconque de caractéristique différente de 2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n .

1 Généralités

1.1 Formes bilinéaires

Définition 1.1. *Forme bilinéaire symétrique* [dSP] p 24,27

Exemple 1.1. $(X, Y) \mapsto X^t A Y$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ [dSP] p 25

Définition 1.2. *matrice associée à b* [dSP] p 26

Exemple 1.2. cf plus haut : A [dSP] p 26

1.2 Formes quadratiques

Définition 1.3. *Forme quadratique* [dSP] p 29

Proposition 1.1. $q(\lambda x)$ + forme polaire [dSP] p 29

Exemple 1.3. $A \mapsto \text{tr}(A^2)$; $\det : \mathcal{M}_2(K) \rightarrow K$ [dSP] p 31

Définition 1.4. *Espace quadratique* [dSP] p 31

Définition 1.5. *Matrice associée à q* [dSP] p 32

Proposition 1.2. *Représentation analytique + changement de base* [dSP] p 32

Proposition 1.3. *Représentation polynomiale* [dSP] p 33

On doit pouvoir compacter les représentations ?

Définition 1.6. *Formes quadratiques équivalents* [dSP] p 41

1.3 Rang, noyau

Définition 1.7. *Noyau* [dSP] p 50

Exemple 1.4. $\ker A$ [dSP] p 50

Définition 1.8. *Rang* [dSP] p 50

Rq : stable par congruence ; 2 formes équivalentes ont même rang [dSP] p 51

Proposition 1.4. $rgq = n - \dim \ker q$ [dSP] p 51

Exemple 1.5. $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz$ [dSP] p 51

Définition 1.9. q non dégénérée [dSP] p 51

Exemple 1.6. $\text{tr}(A^2)$ [dSP] p 51

Proposition 1.5. *CNS non dégénérée ; isomorphisme avec les b* [dSP] p 51

Proposition 1.6. *Riesz généralisé* [dSP] p 52

Proposition 1.7. q dégénérée : on se ramène à sa partie régulière [dSP] p 65

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs et espaces orthogonaux

Définition 2.1. *vecteurs q -orthogonaux* [dSP] p 67

Théorème 2.1. *Pythagore* [dSP] p 69

Définition 2.2. *parties q -orthogonales* [dSP] p 69

Définition 2.3. *Orthogonal d'une partie* [dSP] p 69

Exemple 2.1. $\{a\}^\perp$ [dSP] p 69

Proposition 2.1. q non dégénérée : $\dim A^\perp = n - \dim A$ [dSP] p 70

2.2 Isotropie

Définition 2.4. *Morphisme métrique et isométrie* [dSP] p 41

Définition 2.5. *Vecteur isotrope / anisotrope* [dSP] p 52

Exemple 2.2. $(x, y) \mapsto xy$ [dSP] p 52

Définition 2.6. *Cône isotrope* [dSP] p 52

Remarque : Le noyau est inclus dans le cône isotrope [dSP] p 52

Exemple 2.3. *Réciproque fautive : q représentée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$* [dSP] p 52

Remarque : en général, le cône isotrope n'est PAS un espace vectoriel [dSP] p 52

2.3 Bases orthogonales et diagonalisation

Définition 2.7. Famille orthogonale [dSP] p 87

Proposition 2.2. Base orthogonale + caractérisation [dSP] p 88

Exemple 2.4. $A \mapsto \text{Tr}({}^tAA)$ et $A \mapsto \text{Tr}(A^2)$ [dSP] p 88

Théorème 2.2. Tout espace quadratique de dimension finie admet une base orthogonale [dSP] p 89

Proposition 2.3. Base incomplète [dSP] p 90

Cas réel

Définition 2.8. f.q. définie positive [dSP] p 181

Théorème 2.3. Réduction simultanée [dSP] p 181

Application 2.1. Théorème de John-Loewner [FGNc] p 228

2.4 Méthode de Gauss

Proposition 2.4. Décomposition de Gauss [Goga] p 49

Application à la classification des formes quadratiques
Corps algébriquement clos

Théorème 2.4. Classes d'équivalences sur K algébriquement clos [Szp] p 80

Corollaire 2.1. $\exists$ bon ssi q non dégénérée [Szp] p 81

Cas réel

Théorème 2.5. classes d'équivalence + signature [Szp] p 75

Théorème 2.6. Inertie de Sylvester [Szp] p 75

Corps fini

Théorème 2.7. Classes d'équivalences [Szp] p 83

Corollaire 2.2. cas non dégénéré [Szp] p 84

3 Groupe orthogonal

3.1 Isométries

Définition 3.1. Groupe orthogonal [Szp] p 314

Exemple 3.1. Réflexion orthogonale [dSP] p 54

Proposition 3.1. det d'une isométrie [dSP] p 55

Définition 3.2. Groupe spécial orthogonal [dSP] p 56

3.2 Endomorphisme adjoint

On suppose q non dégénérée

Définition 3.3. Adjoint [Szp] p 64

Proposition 3.2. Existence et unicité [Szp] p 64

Proposition 3.3. $u \in O(q) \Leftrightarrow u^*ou = Id$ [Szp] p 64

3.3 Cas euclidien

Proposition 3.4. bon et matrice de changement de base [Szp] p 77

Théorème 3.1. Spectral [dSP] p 185

Théorème 3.2. Réduction d'endomorphismes orthogonaux [dSP] p 190

3.4 Exemples sur $\mathbb{R}^2$

Dans le plan ?

4 Applications

4.1 Extremums

Théorème 4.1. Schwarz [Rou] p 294

Théorème 4.2. CN / CS extremums [Rou] p 369

EX ?

4.2 Lemme de Morse

Lemme 4.1. Réduction des formes quadratique [Rou] p 209

Théorème 4.3. Lemme de Morse [Rou] p 364

4.3 Théorème de Liapounov

Théorème 4.4. Liapounov [Rou] p 143

Développements

- John Loewner
- Liapounov

Références

- Seguin Pazzis
- X-ENS al 3
- Cagnet, algèbre bilinéaire
- Szpirglas
- Rouvière

Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications

Rapport du jury

On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

Cadre : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie n .

1 Barycentres

1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1. *Système de points pondérés, fonction de Leibniz* [Mera] p 34

Rq : $\sum \alpha_i = 0$ ou non [Mera] p 34

Définition 1.2. *Barycentre* [Mera] p 35

Définition 1.3. *Isobarycentre* [Mera] p 36

Théorème 1.1. *Propriétés (homogénéité, commutativité, associativité)* [Mera] p 35

Application 1.1. *Médianes d'un triangle; isobarycentre des sommets d'un parallélogramme; isobarycentre des sommets d'un tétraèdre* [Mera] p 36

1.2 Caractérisations par le barycentre

1.2.1 Application affine

Définition 1.4. *Application affine* [Mera] p 45

Proposition 1.1. *Caractérisation* [Mera] p 47

1.2.2 Sous-espace affine

Définition 1.5. *Sous espace affine engendré* [Mera] p 30

Théorème 1.2. *se engendre = ensemble des barycentres* [Mera] p 37

Exemple 1.1. *Droite et plan* [Mera] p 37-38

Théorème 1.3. *Caractérisation* [Mera] p 38

1.3 Repère barycentrique

1.3.1 Définition

Définition 1.6. *Famille affinement libre* [Mera] p 39

Définition 1.7. *Repère affine* [Mera] p 40

Définition 1.8. *système de coordonnées barycentriques* [Mera] p 41

Exemple 1.2. *Coordonnées de l'isobarycentre d'un triangle*

Théorème 1.4. *Système normalisé* [Mera] p 41

Exemple 1.3. *C-ex : Quand le repère n'est pas affine* [Mera] p 41

1.3.2 Interprétation en terme d'aire

Définition 1.9. *Aire algébrique d'un triangle* [Tru] p 47

Proposition 1.2. *les aires algébriques ... système de coordonnées barycentriques* [Tru] p 48

Application 1.2. *Coordonnées barycentriques de points remarquables* [Tru] p 49

1.4 Applications du barycentre

Théorème 1.5. *Céva* [Tru] p 51

Théorème 1.6. *Ménélaüs* [Tru] p 52

Application 1.3. *Ellipse de Steiner*

2 Convexité

2.1 Définitions et théorème fondamental

Définition 2.1. *Segment* [Mera] p 41

Définition 2.2. *Combinaison convexe* [Tau] p 69

Définition 2.3. *partie étoilée, partie convexe* [Tau] p 70

Proposition 2.1. *Résultats immédiats* [Tau] p 70

Proposition 2.2. *image directe et réciproque d'un convexe par une app affine* [Mera] p 48

2.2 Enveloppe convexe

Définition 2.4. *Enveloppe convexe* [Tau] p 71

Proposition 2.3. *Ensemble des combinaisons convexes* [Tau] p 71
i.e. Barycentres à coefficients positifs!!!

Application 2.1. *Théorème de Lucas* [Tau] p 71

Proposition 2.4. *Prop de l'enveloppe convexe* [Tau] p 71

Exemple 2.1. *C-ex : L'enveloppe convexe d'une partie fermée n'est pas nécessairement fermée* [Tau] p 71

Théorème 2.1. Carathéodory [Tau] p 71

Corollaire 2.1. *Cas compact ; Cas borné* [Tau] p 71

2.3 Projection

Théorème 2.2. *Projection*

Application 2.2. *Théorème de Motzkin* [Tau] p 78

2.4 Points extrémaux

Définition 2.5. *Point extrémal* [Tau] p 82

Proposition 2.5. *caractérisations des points extrémaux* [Tau] p 82

Théorème 2.3. *Krein-Millman* [Tau] p 83

Application 2.3. *Points extrémaux de la boule unité de $L(E)$* [FGNc]

2.5 Applications de la convexité

Théorème 2.4. *John Loewner* [FGNc]

Théorème 2.5. Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ [Ale]

Développements

- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$
- Ellipsoïde de John Loewner
- Carathéodory et corollaires
- Enveloppe convexe de la boule unité de $L(E)$
- Ellipse de Steiner

Références

- Mercier
- Tauvel, géométrie
- Truffault
- Orlaux X-ENS algèbre 3
- Alessandri

Leçon 182 : Application des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

Rapport du jury

Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. L'étude des inversions est tout à fait appropriée dans cette leçon, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement. La formule de Ptolémée, pour donner un exemple, illustre bien l'utilisation de cet outil.

1 Géométrie plane

1.1 Modélisation du plan par $\mathbb{C}$

Définition 1.1. *Complexe affine et point image* [Eid] p 221

Rq : on identifiera un point du plan et son affixe ($\in \mathbb{C}$)

Proposition 1.1. *Expressions du produit scalaire et du produit mixte en fonction des affixes* [Eid] p 221

Application 1.1. *u et v colinéaires ssi $\bar{z}_u z_v \in \mathbb{R}$*

Application 1.2. *Équation de la droite, du cercle* [Eid] p 222

Application 1.3. *Aire d'un triangle, points remarquables* [Eid] p 224

1.2 Angles

Proposition 1.2. *Définition de $\exp$ sur $\mathbb{C}$* [Nou] p 195

Proposition 1.3. *$\exp^z = 1$ ssi* [Nou] p 195

Proposition 1.4. *Morphisme $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$* [Nou] p 196

Proposition 1.5. *! rotation qui envoie u sur v* [Aud] p 73

Proposition 1.6. *Relation d'équivalence sur les couples de vecteurs* [Aud] p 74

Définition 1.2. *Angle orienté* [Aud] p 74

Rq : on a défini angle orienté SANS orienter le plan. Maintenant, on donne une orientation du plan [Aud] p 77

Définition 1.3. *Matrice de rotation + mesure de l'angle* [Aud] p 77

Proposition 1.7. *Si $u = OM, v = ON$, et $(u, v) = \theta$ alors $z_N = \exp^{i\theta} z_M$*

Proposition 1.8. *π mesure de l'angle plat* [Aud] p 77

Définition 1.4. *Coordonnées polaires*

Application 1.4. *Caractérisation des triangles équilatéraux* [Eid] p 247

1.3 Similitudes planes

Définition 1.5. *Similitude directe (avec les complexes)* [Aud] p 93

Proposition 1.9. *Similitude directe = homothétie o rotation* [Aud] p 90

Corollaire 1.1. *conserver les angles, droites et angles, image du cercle* [Aud] p 91

Définition 1.6. *Similitude indirecte*

Proposition 1.10. *Caractérisation des similitudes* [Aud] p 93

Cas des transformations orthogonales

Théorème 1.1. *$O^+(E), O^-(E)$* [Nou] p 158-159

Proposition 1.11. *$iso + O^+(E)$ commutatif* [Nou] p 159

Proposition 1.12. *Lien avec $\mathbb{C}$* [Nou] p 159

1.4 Polygones constructibles (à la règle et au compas)

Définition 1.7. *Point constructible en un pas* [Goz] p 47

Définition 1.8. *Point constructible* [Goz] p 48

Définition 1.9. *+prop : nombre constructible* [Goz] p 49

Théorème 1.2. *Wantzel* [Goz] p 50

Définition 1.10. *Polygones constructibles ? ? ? ?*

Théorème 1.3. Gauss Wantzel [Mera] p 392, thm 318

1.5 Applications

SI Ellipse de Steiner en développement !!!! Soit par les polynômes et le thm de Lucas, soit par le théorème de Napoléon

2 Droite projective complexe

2.1 $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et sphère de Riemann

Trois définitions de la droite projective : [Aud] p 200

Définition 2.1. *Espace quotient des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$*

Définition 2.2. *$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$* [Sphère de Riemann]

Définition 2.3. *Sphère unité S^2 de l'espace $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ par la projection stéréographique*

2.2 Homographies

Définition 2.4. Homographie [Aud] p 191

Proposition 2.1. Les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ forment un groupe iso $GL_2(\mathbb{C})/\{\text{homothéties}\}$ [Aud] p 191

On le note $PGL_2(\mathbb{C})$

Proposition 2.2. Une homographie s'écrit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ + conventions [Aud] p 194

Proposition 2.3. $PGL_2(\mathbb{C})$ engendré par les similitudes directes et $z \mapsto \frac{1}{z}$ [Aud] p 201

Proposition 2.4. Elles conservent les angles orientés [Aud] p 201

2.3 Birapport

Proposition 2.5. et def : Birapport [Aud] p 196

Rq : valeurs particulières [Aud] p 196

Définition 2.5. $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a}$ [Aud] p 197

Définition 2.6. Division harmonique [Aud] p 200

Proposition 2.6. f homographie ssi conserve les birapports

2.4 Groupe circulaire

Proposition 2.7. points alignés, cocycliques et birapport [Aud] p 202

Corollaire 2.1. homographie (droite ou cercle) = droite ou cercle [Aud] p 202

Définition 2.7. Groupe circulaire [Aud] p 203

Proposition 2.8. GC engendré par les inversions et les réflexions [Aud] p 203

Théorème 2.1. $GC = \text{ceux qui conservent cercles et droites}$ [Aud] p 204

Développements

- Théorème de Gauss Wantzel
- Groupe circulaire

Références

- Eiden
- Audin
- Nourdin
- Mercier
- Gozard

Leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Rapport du jury

C'est une leçon transversale et difficile, qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. D'une part un groupe de transformations permet de ramener un problème de géométrie à un problème plus simple.

D'autre part, les actions de groupes sur la géométrie permettent de dégager des invariants essentiels (angle, birapport). On retrouvera encore avec bonheur les groupes d'isométries d'un solide.

1 Géométrie affine

1.1 Espace affine, application affine

Définition 1.1. *Espace affine* [Com] p 105

Rq sur l'action de groupe [Com] p 105

Proposition 1.1. *Sous groupe des translations* [Com] p 106

Exemple 1.1. *Espace affine canonique* [Com] p 106

Définition 1.2. *Application affine* [Com] p 109

Proposition 1.2. */def : Unicité ; application linéaire associée* [Com] p 110

Proposition 1.3. *Surjectivité* [Com] p 111

Exemple 1.2. *Homothétie, projection, translation* [Com] p 111

Application 1.1. *Théorème de Thalès* [Aud] p 26

Application 1.2. *Desargues* [Aud] p 28

1.2 Groupe affine

Définition 1.3. *Groupe affine* [Com] p 118

Lemme 1.1. *caractérisation des translations* [Com] p 118

Proposition 1.4. *groupe + homomorphisme + noyau* [Com] p 119

Proposition 1.5. *sous-groupes ...* [Com] p 120

Exemple 1.3. *sous groupe symétries* [Com] p 121

2 Géométrie euclidienne

Définition 2.1. *Espace affine euclidien* [Com] p 153

2.1 Isométries

Définition 2.2. *Endo orthogonal ; Groupe orthogonal* [Com] p 154

Définition 2.3. *Groupe des isométries* [Com] p 156

Exemple 2.1. *Les translations, les homothéties sont des isométries* [Aud] p 53

Exemple 2.2. *isomorphe à l'espace canonique* [Com] p 156

Définition 2.4. *Groupe des déplacements* [Com] p 162

Exemple 2.3. *Translation, symétrie orthogonale* [Com] p 162 (def p 158)

Proposition 2.1. */def Forme canonique d'une isométrie* [Com] p 163

Proposition 2.2. *Classification des isométries du plan (avec def des isom qu'on connaît pas) ; ensembles invariants, matrices* [Com] p 162

2.2 Angles

Proposition 2.3. *Unique rotation entre deux vecteurs unitaires* [Aud] p 73

Définition 2.5. *Angle orienté (par la relation d'équivalence)* [Aud] p 74

Proposition 2.4. *Les symétries renversent les angles orientés* [Aud] p 78

Rq : angle géométrique [Aud] p 79

Proposition 2.5. *Les isométries conservent les angles géométriques* [Aud] p 79

Application 2.1. *Théorème des angles inscrits* [Aud] p 84

Application 2.2. *cocyclicité* [Aud] p 85

2.3 Isométries conservant un polygone ou un polyèdre

Définition 2.6. *Groupe diédral* [Ulm]

Proposition 2.6. *Générateurs* [Ulm]

Proposition 2.7. *Les isométries du cube et du tétraèdre* [CG]

3 Droite projective complexe

3.1 $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et sphère de Riemann

Trois définitions de la droite projective : [Aud] p 200

Définition 3.1. *Espace quotient des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$*

Définition 3.2. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [Sphère de Riemann]

Définition 3.3. *Sphère unité S^2 de l'espace $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ par la projection stéréographique*

3.2 Homographies

Définition 3.4. Homographie [Aud] p 191

Proposition 3.1. Les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ forment un groupe iso $GL_2(\mathbb{C})/\{\text{homothéties}\}$ [Aud] p 191

On le note $PGL_2(\mathbb{C})$

Proposition 3.2. Une homographie s'écrit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ + conventions [Aud] p 194

Proposition 3.3. $PGL_2(\mathbb{C})$ engendré par les similitudes directes et $z \mapsto \frac{1}{z}$ [Aud] p 201

Proposition 3.4. Elles conservent les angles orientés [Aud] p 201

3.3 Birapport

Proposition 3.5. et def : Birapport [Aud] p 196

Rq : valeurs particulières [Aud] p 196

Définition 3.5. $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a}$ [Aud] p 197

Définition 3.6. Division harmonique [Aud] p 200

Proposition 3.6. f homographie ssi conserve les birapports

3.4 Groupe circulaire

Proposition 3.7. points alignés, cocycliques et birapport [Aud] p 202

Corollaire 3.1. homographie (droite ou cercle) = droite ou cercle [Aud] p 202

Développements

–

Références

– Audin

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

Rapport du jury

Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités! L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien fécond avec l'algèbre linéaire.

1 Outils classiques du dénombrement

Définition 1.1. Ensemble fini et cardinal [Bia] p 6

1.1 Union d'ensembles finis

Théorème 1.1. Formule du crible [Bia] p 6

Corollaire 1.1. Cas disjoint [Bia]

Corollaire 1.2. Lemme des bergers [Bia] p 19

Application 1.1. 775 nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre pair [Bia] p 8

Application 1.2. Indicatrice d'Euler φ + fonction de Möbius μ + prop : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ et $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$ [Par] p 4,7

Application 1.3. $|SO_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ [FGNa]

Application 1.4. Principe des tiroirs

1.2 Produit d'ensembles finis

Définition 1.2. p -uplet et produit d'ensembles [Bia] p 7

Théorème 1.2. Cardinal d'un produit d'ensembles [Bia] p 7

Application 1.5. cardinal de l'ensemble des applications de X dans Y [Bia] p 7

Exemple 1.1. tirage de boules avec remise [Bia] p 8

1.3 Arrangements, permutations et combinaisons

Définition 1.3. arrangement [Bia] p 7

si $n = p$: permutation

Proposition 1.1. On peut identifier arrangement et injection [Bia] p 7

Théorème 1.3. Nombre d'arrangements [Bia] p 7

Application 1.6. Tirage ordonné sans remise [Bia] p 8

Application 1.7. Cardinal de $\mathfrak{S}_n$ [Bia] p 8

Définition 1.4. Combinaison [Bia] p 10

Théorème 1.4. Nombre de combinaisons [Bia] p 10

Proposition 1.2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ [Bia] p 10

Application 1.8. Formule du binôme [Bia] p 12

Application 1.9. Tiercés dans l'ordre et le désordres [Bia] p 14

Application 1.10. Triangle de Pascal [Bia] p 11

Application 1.11. Inverse de la matrice de Pascal [Bia] p 13
+ exemple en petite dimension

Application 1.12. nombre de surjections de $[1, n]$ dans $[1, p]$

2 Utilisation des actions de groupes

Soit G un groupe qui agit sur un ensemble fini X . Notation Orbite et Stabilisateur.

Théorème 2.1. $|X| = \sum_{i=1}^R |\text{Orb}(x_i)|$ [Cala] p 183

Application 2.1. Théorème de Lagrange [Cala] p 75

Théorème 2.2. $\forall x \in X, |G| = |\text{Orb}(x)| |\text{Stab}(x)|$ [Cala] p 182

Application 2.2. $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$ et $|SL_n(\mathbb{F}_q)|$ [FGNa] p 17

Application 2.3. Nombre de matrices diagonalisables dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ [CG] p 284-285

Théorème 2.3. Double comptage [Cala] p 202

Application 2.4. $\sum_{k=0}^n k C_n^k$

Théorème 2.4. Formule de Burnside [Cala] p 203

3 Séries génératrices et fonctions arithmétiques

3.1 Fonctions arithmétiques

Définition 3.1. Fonction arithmétique [Par] p 3

Exemple 3.1. e, z, φ, μ [Par] p 3-4

On peut manipuler les fonctions arithmétiques au moyen de séries. Ici, on ne considère ces séries que formellement, on ne cherchera pas à en étudier la convergence.

3.2 Séries génératrices classiques

Définition 3.2. *Série génératrice*

Application 3.1. *Nombres de Catalan* [Bia] p 20

Application 3.2. *Nombres de Bell* [FGNa]

Application 3.3. Partition d'un entier en parts fixées [FGNe] p 199

3.3 Séries de Dirichlet

Définition 3.3. *Série de Dirichlet* [Par] p 11

On muni l'ensemble des fonctions arithmétiques d'un produit de convolution, qui lui donne une structure d'algèbre.

Définition 3.4. *Produit de convolution* [Par] p 7

Exemple 3.2. $\mu * z = e$ [Par] p 7, 12

Application 3.4. *Inversion de Möbius* [FG]

Application 3.5. *Probabilité que a et b soient premiers entre eux* *Trouver une référence!!!!*

Développements

- Endomorphismes diagonalisables de $GL_n(\mathbb{F}_q)$
- Partition d'un entier en parts fixées

Références

- de Biasi
- Parent
- Calais (groupes)
- Orlaux X-ENS algèbre 1
- H2G2
- X-ENS analyse 2
- Francinou Gianella

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Rapport du jury

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre utilisation de la notion compacité et notion de compacité). Néanmoins, on attend des candidats une présentation synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue.

Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extremums mériterait d'être davantage étudié (lien avec la coercivité en dimension finie).

Les candidats solides peuvent aussi enrichir leur leçon par des exemples tels que l'étude des opérateurs à noyau continu.

Pour les candidats ambitieux, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales.

1 Généralités

1.1 Propriété de Borel Lebesgue

Définition 1.1. Espace métrique compact [Goub] p 27

Exemple 1.1. [Goub] p 27

Proposition 1.1. compact $\Rightarrow$ borné [Goub] p 27

Proposition 1.2. dual de Borel Lebesgue [Goub] p 28

Proposition 1.3. Intersection suite décroissante de fermés [Goub] p 28

Proposition 1.4. caractérisation d'une partie compacte [Goub] p 28

Proposition 1.5. union finie ; intersection qcque [Goub] p 28

1.2 Propriété de Bolzano-Weierstrass

Définition 1.2. Précompacité [Goub] p 29

Théorème 1.1. Bolzano Weierstrass [Goub] p 28

Corollaire 1.1. Caractérisation de la compacité [Goub] p 30

1.3 Propriétés générales des compacts

Proposition 1.6. Partie fermée d'un compact = compacte et compact alors fermé borné [Goub] p 30

Proposition 1.7. compact $\Rightarrow$ complet [Goub] p 30

Proposition 1.8. Unique valeur d'adhérence [Goub] p 30

Proposition 1.9. Produit fini d'espaces compacts [Goub] p 30

Proposition 1.10. Compacts de $\mathbb{R}^n$ [Goub] p 30

Proposition 1.11. Intervalles de $\mathbb{R}$ comme union de compacts [Rou] p 171

Application 1.1. Cauchy Lipschitz [Rou]

1.4 Extraction diagonale

Définition 1.3. Relative compacité [HL] p 11

Théorème 1.2. Extraction diagonale [HL] p 11

Corollaire 1.2. Tychonoff [HL] p 12

Application 1.2. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ compact [HL] p 12

2 Compacité et fonctions continues

2.1 Extremums

Théorème 2.1. Fonction continue sur un compact [Goub] p 31

Théorème 2.2. Fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ bornée et atteint ses bornes [Tes] p 44

Définition 2.1. Fonction coercive [Tes] p 46

Théorème 2.3. Extremum d'une fonction coercive [Tes] p 46

Théorème 2.4. Fonction qui tend vers 0 au bord de l'espace de définition [Tes] p 48

Applications

Théorème 2.5. d'Alembert [Tes] p 48

Théorème 2.6. Equivalence des normes en dimension finie [Tes] p 49

Application 2.1. app lin continues ; complétude ; compact $\Leftrightarrow$ fermé borné [Goub] p 50

Théorème 2.7. Polynôme de meilleure approximation [Tes] p 52

Théorème 2.8. Rolle + généralisé [Tes] p 72

Application 2.2. théorème des accroissements finis [Tes] p 73

Théorème 2.9. John-Loewner [FGNc]

2.2 Théorème de Heine

Proposition 2.1. *image d'un compact par une application continue* [Goub] p 31

Exemple 2.1. $C\text{-}ex : \sin^{-1}[-1, 1] = \mathbb{R}$

Proposition 2.2. *bicontinuité* [Goub] p 31

Théorème 2.10. *Heine* [Goub] p 31

2.3 Théorèmes de points fixes

Théorème 2.11. *Point fixe cas compact* [Goub] p 34

Exemple 2.2. *Faux sur un espace non compact* [Goub] p 35

Proposition 2.3. *point fixe de Brouwer* [Goub] p 52

Théorème 2.12. Point fixe + sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ [Ale]

3 Compacité dans des espaces de fonctions : le théorème d'Ascoli

Rq : en dimension infinie fermé borné $\nRightarrow$ compact

Définition 3.1. *Equicontinuité et uniforme equicontinuité* [HL] p 37

Proposition 3.1. *equi ssi unif equi* [HL] p 38

Théorème 3.1. *Ascoli* [HL] p 39

Application 3.1. *Cauchy Peano* [QZ] p 359

Références

- Gourdon an
- Hirsch Lacombe
- Zuily Queffelec
- Rouvière
- Testard
- Alessandri
- Oaux X ENS al 3

Développements

- Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$
- Cauchy lipschitz global

Leçon 206 : Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Rapport du jury

Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses des théorèmes énoncés. Les applications aux équations différentielles sont importantes. Répétons que la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz est attendue.

Pour l'analyse de convergence des méthodes de point fixe, les candidats ne font pas suffisamment le lien entre le caractère localement contractant de l'opérateur itéré et la valeur de la différentielle au point fixe. La méthode de Newton, interprétée comme une méthode de point fixe, fournit un exemple où cette différentielle est nulle, la vitesse de convergence étant alors de type quadratique. L'étude de méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires conduit à relier ce caractère contractant à la notion de rayon spectral.

Pour les candidats solides, il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences comme le théorème de Perron-Frobenius.

Soit (X, d) un espace métrique complet

Définition 0.2. Point fixe [Dema] p 93 Attention! Pas continu

1 Points fixes dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$

1.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.1. Valeurs intermédiaires, point fixe de $f - \text{id}$ [Tes] p 126

Théorème 1.2. Point fixe (bij) [Tes] p 126

Exemple 1.1. C-ex : $f : x \in [0, 1] \mapsto x + 1[1, 2]$; $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ pas continue (faire une $1 - x$ sur les bords et 0 au milieu) sans ref!

1.2 Fonctions monotones

Théorème 1.3. $f : K \rightarrow K$, K compact, croissante, alors point fixe [Tes] p 138

Exemple 1.2. C-ex avec f décroissante [Tes] p 139

Autres résultats : Rombaldi?

1.3 Sous-groupes compacts de GL_n

Théorème 1.4. Point fixe d'un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ [Ale]

Corollaire 1.1. Sous groupes compacts de GL_n [Ale]

2 Point fixe de Picart

On se place dans un espace métrique complet

2.1 Théorème du point fixe de Picart

Définition 2.1. Fonction contractante [Rou] p 147

Théorème 2.1. Point fixe de Picart [Rou] p 147

Exemple 2.1. Contre exemples avec ensemble pas complet, espace d'arrivée différent, fonction non contractante, ... [Rou] p 148

Exemple 2.2. C-ex : avec $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ [Rou] p 148

Mais on a quand même :

Théorème 2.2. avec un espace compact [Tes] p 321

Corollaire 2.1. Cas f^n contractante [Rou] p 148 [Tes] p 320

Exemple 2.3. Ça marche si f est discontinue et qu'une de ses itérées est contractante [Tes] p 327

2.2 Application au calcul différentiel

Théorème 2.3. Inversion locale [Rou] p 188

Méthode : on transforme le problème en un problème de point fixe $F(x) = x$ où $F(x) = x - Df(a)^{-1}(f(x) - y)$ [Rou] p 189

Exemple 2.4. et C-ex [Rou] p 204

Application 2.1. Racine k -ième d'une matrice [BMP] p 11

Théorème 2.4. Fonctions implicites [Rou] p 192

Exemple 2.5. [Rou] p 193

Application 2.2. Théorème des extrema liés [Goub]

Dessins en annexe?

2.3 Application à la résolution d'équations différentielles

Théorème 2.5. Cauchy-Lipschitz global [Rou] p 180

Exemple 2.6. Pendule [Rou] p 184

Exemple 2.7. C-ex $\sqrt{x}$ [Goub]

Théorème 2.6. Equation intégrale de Fredholm [Rou] p 184

Théorème 2.7. Equation intégrale de Volterra [Rou] p 184

3 Application à la résolution d'équation $F(x) = 0$

3.1 Introduction

3

Proposition 3.1. *Point attractif, super attractif et répulsif [Rou] p 150*

Exemple 3.1. *nombre d'or [Rou] p 150*

Exemple 3.2. *C-ex avec $|F'| = 1$ [Rou] p 150*

Méthode : comment on se ramène à un point fixe pour résoudre [Rou] p 15

3.2 Méthode de Newton

Théorème 3.1. *méthode de Newton [Rou] p 152*

Exemple 3.3. *racine [Rou] p 152*

Exemple 3.4. *nombre d'or [Rou] p 153*

Références

- Testard
- Alessandri
- Rouvière
- OA
- Gourdon analyse

Développements

- Sous-groupes compacts
- Cauchy Lipschitz

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Rapport du jury

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Une telle leçon doit bien sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lequel il n'a aucune idée sur leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués. L'analyse des constantes de stabilité pour l'interpolation de Lagrange fournit un exemple non trivial et peu présenté.

1 Généralités

1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1. Norme + evn [Goub] p 7

Proposition 1.1. Un evn est un espace métrique [Ray] p 93

Exemple 1.1. $\mathbb{R}^n$ différentes normes + $\mathcal{B}(X, E)$ [Goub] p 8

Définition 1.2. Normes équivalents [Goub] p 12

Exemple 1.2. Équivalence des normes en dim finie [Goub] p 12

Exemple 1.3. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : \|\cdot\|_1 \text{ et } \|\cdot\|_\infty$ pas équivalentes [Hau] p 321

1.2 Continuité des applications linéaires

Théorème 1.1. CNS de continuité [Goub] p 48

Définition 1.3. Norme d'application [Goub] p 48

Proposition 1.2. $\mathcal{L}_c(E, F)$ evn [Goub] p 48

Proposition 1.3. Sous-multiplicité de la norme [Goub] p 48

Définition 1.4. Dual topologique [Goub] p 49

Proposition 1.4. f forme linéaire continue ssi $\ker f$ est fermé [Goub] p 49

Exemple 1.4. Appli linéaire discontinue [Hau] p 323

1.3 Dimension finie

Théorème 1.2. Équivalence des normes [Goub] p 50

Corollaire 1.1. Continuité des applications linéaires [Goub] p 50

Corollaire 1.2. Tout evn de dim finie est complet [Goub] p 50

Corollaire 1.3. Tout sev de dim finie d'un evn est fermé [Goub] p 50

Corollaire 1.4. E de dim finie : compact ssi fermé borné [Goub] p 50

Théorème 1.3. Riesz [Goub] p 56

Théorème 1.4. Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ [Ale]

2 Espaces de Banach

Banach Steinhauss, thm de l'application ouverte,

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1. Espace de Banach [Goub] p 47

Exemple 2.1. Thm de Riesz Fischer [?]

Proposition 2.1. F Banach donne $\mathcal{L}_c(E, F)$ Banach [Ray] p 104

Corollaire 2.1. (Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) le dual est un Banach [Goub] p 49

Corollaire 2.2. Banach alors : absolument cvgte $\Rightarrow$ cvgte [Goub] p 49

Proposition 2.2. Tout evn de dim finie est un Banach [Goub] p 50

Exemple 2.2. $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty$ Banach MAIS faux pour $\|\cdot\|_1$ [Ray] p 99

2.2 Lemme de Baire et applications

Théorème 2.1. Théorème de Baire [Goub] p 397

Application 2.1. Un evn à base dénombrable n'est pas un Banach [Goub] p 399

Application 2.2. Les fonctions continues nulle part dérivables sont denses [Goub] p 401

Application 2.3. Théorème de l'application ouverte ; théorème de Banach [Goub] p 403

Théorème 2.2. Banach Steinhauss + app séries de Fourier [Goub] p 404

Application 2.4. Première conséquence de B-S [Goub] p 404

Exemple 2.3. Fonction continue différente de sa série de Fourier [Goub] p 264

3 Espaces de Hilbert

Projection sur un convexe fermé Orthogonal d'un sous espace Opérateurs compacts?

3.1 Généralités

Définition 3.1. *Espace préhilbertien, espace de Hilbert* [BMP] p 91

Exemple 3.1. l^2 [BMP] p 91

Théorème 3.1. *Inégalité de Cauchy Schwarz* [BMP] p 93

Théorème 3.2. *identité du parallélogramme* [BMP] p 93

Définition 3.2. *Orthogonal d'un sous-espace* [BMP] p 99

3.2 Applications linéaires continues

Théorème 3.3. *Projection sur un convexe fermé* [BMP] p 95

Proposition 3.1. *projection 1-lip donc continue* [BMP] p 96

Théorème 3.4. *Projection sur les sev fermés* [BMP] p 98

Théorème 3.5. *Représentation de Riesz* [BMP] p 103

Application 3.1. *Adjoint d'un endomorphisme* [BMP] p 106

3.3 Bases hilbertiennes

Définition 3.3. *Base Hilbertienne* [BMP] p 107

Théorème 3.6. *Existence de base hilbertienne (orthogonalisation)* [BMP] p 108

Théorème 3.7. *Caractérisation des bases hilbertiennes* [BMP] p 109

Application 3.2. *Série de Fourier, ou échantillonnage* [BMP] p 110

Références

- Saint Raymond, Topologie calcul différentiel et variable complexe
- Gourdon, analyse
- Hauchecorne, les contre-exemples en mathématiques
- Brézis
- OA

Développements

- Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$
- Banach Steinhaus

Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Rapport du jury

Il s'agit d'une belle leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration de ces deux théorèmes fondamentaux. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

Cadre : dimension finie

Définition 0.4. C^k -difféomorphisme [Rou] p 54

1 Théorème d'inversion locale

1.1 Énoncés

Théorème 1.1. Inversion locale C^1 [Rou] p 188

Annexe : figure [Rou] p 188

Exemple 1.1. $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$
 C -ex : $f(x) = x + x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ [Rou] p 204

Remarque : Version C^k

Théorème 1.2. Inversion globale (C^k) [Rou] p 191

Exemple 1.2. C -ex : $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ local mais pas global

Exemple 1.3. Coordonnées cartésiennes [Rou] p 71

Théorème 1.3. Inversion globale version holomorphe [Rou] p 191

1.2 Applications

Théorème 1.4. Hadamard-Lévy [Rou] p 191

Applications ?

Proposition 1.1. app : fonction k -dilatante [Rou] p 221

Théorème 1.5. Racine k -ème d'une matrice

1.2.1 Immersion, submersion

Théorème 1.6. Immersion [Laf] p 26 [Rou] p 230

Théorème 1.7. Submersion [Laf] p 27

1.2.2 Réduction des formes quadratiques et lemme de Morse

Théorème 1.8. Réduction des formes quadratiques [Rou] p 209

Théorème 1.9. Lemme de Morse [Rou] p 354

Application 1.1. Condition suffisante de minimalité [BMP] p 15

Application 1.2. $f(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ a un point double à l'origine [Rou] p 334

2 Théorème des fonctions implicite

2.1 Énoncés

Théorème 2.1. Fonctions implicites [Rou] p 192

Rq : versions C^k et holomorphe

Schéma en annexe

Exemple 2.1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (cercle) [Rou] p 193

Proposition 2.1. différentielle de la fonctions implicite [Rou] p 194

Exemple 2.2. Diff dans le cas du cercle [Rou] p 194

Rq : fonction implicite et inversion locale équivalents [Rou] p 196

2.2 Applications

2.2.1 Polynômes

Application 2.1. Régularité d'une racine simple [BMP] p 11

Application 2.2. Polynômes scindés à racines simples = ouvert [BMP] p 12

2.2.2 Extrema liés

Théorème 2.2. Extrema liés [Rou] p 372

Remarque : Multiplicateurs de Lagrange

Remarque : Interprétation géométrique [BMP] p 20

Exemple 2.3. Contre-exemple [BMP] p 21

Application 2.3. Diagonalisation des endomorphismes symétriques [BMP] p 21

Application 2.4. Inégalité arithmético-géométrique [Goub] p 319

Application 2.5. Inégalité de Hadamard [Rou] p 409

3 Application aux sous-variétés

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Sous-variété* [Laf] p 28

Annexe : schéma [Rou] p 198

Exemple 3.1. *Cône époinaté* [Rou] p 198

Exemple 3.2. *C-ex : $y = |x|$* [Rou] p 269

Théorème 3.1. *Des sous-variétés* [Laf] p 29 [Rou] p 200

Rq : implications données par les théorèmes

3.2 Espaces tangents

[Rou] p 198

On peut mettre ici l'interprétation géométrique du théorème des extrema liés

3.3 Exemples

Exemple 3.3. *Sphère S^n* [Laf] p 30

Exemple 3.4. *Tore T^n* [Laf] p 30

Exemple 3.5. *$SL_n(\mathbb{R})$* [Rou] p 284

Exemple 3.6. *Groupe orthogonal* [Laf] p 31 [Rou] p 284

Références

- Rouvière
- Lafontaine
- OA
- Gourdon analyse

Développements

- Extrema liés
- Lemme de Morse

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Rapport du jury

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles. Une bonne maîtrise du théorème de différentiation composée est attendue. L'énoncé doit être connu et compris ; il faut pouvoir l'appliquer dans des situations simples. Signalons aussi que cette application pose souvent problème lorsque l'une des fonctions en jeu est une fonction réelle de variable réelle, comme lorsque que l'on calcule la différentielle de l'application $x \mapsto \|x\|$ pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

La notion de différentielle seconde est attendue au moins pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ainsi que les applications classiques quant à l'existence d'extremums locaux.

Cadre : on considère des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

1 Généralités sur la différentiabilité (ordre 1)

1.1 Différentielle

Définition 1.1. Application différentiable [Rou] p 45

Définition 1.2. Différentielle (prop = unicité) [Rou] p 46

Exemple 1.1. Fonction réelle d'une variable réelle [Rou] p 46

Exemple 1.2. Application constante, linéaire ou quadratique [Rou] p 56

Proposition 1.1. Continuité + linéarité [Rou] p 50

Rq : dans le cas où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec le produit scalaire, on peut considérer le gradient [Rou] p 50

Proposition 1.2. Différentielle de la composée [Rou] p 50

Définition 1.3. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ [Rou] p 54

Définition 1.4. $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme [Rou] p 54

Proposition 1.3. Différentielle de l'inverse [Rou] p 54

Exemple 1.3. Différentielle de l'inverse [Rou] p 57

1.2 Lien avec les dérivées partielles

Définition 1.5. Dérivée selon le vecteur [Goub] p 304

Définition 1.6. Dérivée partielle [Goub] p 305

Proposition 1.4. Si différentiable (à valeurs dans $\mathbb{R}$, les dérivées partielles existent + égalité [Goub] p 305

Exemple 1.4. C-ex : toutes les dérivées partielles mais pas de continuité [Goub] p 309

Théorème 1.1. Si dérivées partielles existent + continues .. [Goub] p 305

Exemple 1.5. Dérivée du det [Goub] p 313

Définition 1.7. Jacobien [Goub] p 307

(app : calcul d'intégrale par changement de variable)

Application 1.1. Différentielle de la composée avec les dérivées partielles [Goub] p 307

Application 1.2. Calcul du laplacien [Goub] p 307

1.3 Plan tangent ? ?

Exemple 1.6. Plan tangent à une surface définie implicitement [Rou] p 52 + dessin annexe

1.4 Accroissements finis

Théorème 1.2. Inégalité de la moyenne [Rou] p 104

Corollaire 1.1. Lipschitz + constante [Rou] p 105,106

Application 1.3. Unicité de la solution d'une équation [Rou] p 107

Application 1.4. Limite et exponentielle [Rou] p 117

2 Inversion locale, fonctions implicites

2.1 Théorèmes d'inversion locale

Théorème 2.1. Inversion locale [Rou] p 188

Application 2.1. Racine k-è d'une matrice [BMP] p 11

Théorème 2.2. Inversion globale [Rou] p 190

Exemple 2.1. C-ex : difféo local pas global [Rou] p 204

Théorème 2.3. Hadamard Lévy [Rou] p 191 ? ?

2.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 2.4. *fonctions implicites* [Rou] p 192

Exemple 2.2. [Rou] p 193

3 Différentielles d'ordre supérieur

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Application deux fois différentiable; différentielle seconde; matrice hessienne; forme bilinéaire associée* [Rou] p 293

Théorème 3.1. *de Schwarz* [Rou] p 294

Théorème 3.2. *Si f est de classe C^2* [Rou] p 295

Exemple 3.1. *C-ex* [Rou] p 296

Définition 3.2. *Par récurrences : différentielles d'ordre k et fonctions de classe C^k* [Rou] p 296

3.2 Formules de Taylor

Théorème 3.3. *Taylor avec reste intégral* [Rou] p 298

Application 3.1. *Lemme d'Hadamard* [BMP] p 25 [Goub] p 311

Théorème 3.4. *Taylor Young* [Rou] p 297

Théorème 3.5. Lemme de Morse [Rou] p 354

4 Extremums et calcul différentiel

Dans cette partie, on suppose U ouvert.

4.1 Ordre 1

Théorème 4.1. *CN d'ordre 1* [Rou] p 371

Exemple 4.1.
$$f : \begin{matrix} (R)^2 & \rightarrow & (R) \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^4 \end{matrix} \quad [Rou] \text{ p } 380$$

Exemple 4.2. *Contre-exemple : pas suffisant* $f : x \mapsto x$

Application 4.1. *Théorème de Rolle* [Tes] p 71

Application 4.2. *Théorème de Darboux* [Goub] p 78

4.2 Ordre 2

Théorème 4.2. *CN d'ordre 2* [Rou] p 371

Exemple 4.3.
$$f : \begin{matrix} (R)^2 & \rightarrow & (R) \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^4 \end{matrix} \quad [Rou] \text{ p } 378$$

Exemple 4.4. *Contre-exemple :*
$$f : \begin{matrix} (R)^2 & \rightarrow & (R) \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y^3 \end{matrix} \quad [BMP] \text{ p } 18$$

Théorème 4.3. *CS d'ordre 2* [Rou] p 371

Exemple 4.5.
$$f : \begin{matrix} (R)^2 & \rightarrow & (R) \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} \end{matrix} \quad [Rou] \text{ p } 379$$

Exemple 4.6. *Contre-exemple :*
$$f : \begin{matrix} (R)^2 & \rightarrow & (R) \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^4 \end{matrix} \quad [BMP] \text{ p } 18$$

4.3 Problèmes sous contraintes

Théorème 4.4. Extrema liés [Goub]

Remarque : Multiplicateurs de Lagrange

Remarque : Interprétation géométrique [BMP] p 20

Exemple 4.7. *Contre-exemple :* [BMP] p 21

Application 4.3. *Diagonalisation des endomorphismes symétriques* [BMP] p 21

Application 4.4. *Inégalité arithmético-géométrique* [Goub] p 319

Références

- Rouvière
- OA
- Gourdon analyse
- Testard

Développements

- Extremums liés
- Lemme de Morse

Leçon 218 : Applications des formules de Taylor.

Rapport du jury

Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent.

De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue.

Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (par exemple le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $\|f^{(k)}\| \leq 2^{k(n-k)/2} \|f\|^{1-k/n} \|f^{(n)}\|^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n -ième sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

1 Les formules de Taylor

1.1 Les formules en dimension 1

Théorème 1.1. *Rolle* [Goub] p 71

Théorème 1.2. *Formule de Taylor Lagrange* [Goub] p 73

Exemple 1.1. *ex1a* [Goub] p 75

Exemple 1.2. *C-ex fonction dans $\mathbb{R}^n$*

Théorème 1.3. *Inégalité des accroissements finis (général)* [Goub] p 73

Théorème 1.4. *Inégalité de Taylor Lagrange* [Goub] p 74

Exemple 1.3. *EXEMPLE*

Théorème 1.5. *Taylor Young* [Goub] p 74

Exemple 1.4. *EXEMPLE*

Théorème 1.6. *Taylor reste intégral* [Goub] p 75

Rq : Taylor avec reste intégral permet de redémontrer l'inégalité de T-L et la formule de TY (mais c'est pas les mêmes hypothèses)

1.2 Les formules en dimension d

Théorème 1.7. *Taylor Young* [BMP] p 24

Exemple 1.5. *Ordre 1 : différentielle* [BMP] p 25

Rq : les autres formules se généralisent de la même façon.

2 Applications en analyse

2.1 Développements limités

Définition 2.1. *Développement limité* [Goub] p 87

Proposition 2.1. *unicité* [Goub] p 87

Proposition 2.2. *Dérivabilité* [Goub] p 87

Exemple 2.1. *Que ordre 1* [Goub] p 88

Proposition 2.3. *lien avec TY* [Goub] p 88

Exemple 2.2. *développements usuels en O* [Goub] p 89

2.2 Séries entières

Définition 2.2. *Série de Taylor de f* *Référence ?*

Proposition 2.4. *CNS d'une fonction DSE + f = sa série de Taylor* [Goub] p 240

Exemple 2.3. *Exemple2* [Goub] p 241

Exemple 2.4. *C-ex Rq 5* [Goub] p 241

2.3 Probabilités

Événements rares de Poisson ?

Théorème 2.1. *théorème central limite* [QZ] p 540

3 Applications en analyse numérique

3.1 Méthode de Newton

Théorème 3.1. *Newton* [Rou]

3.2 Approximation d'intégrales

Poser le pb [Dema] p 67

Définition 3.1. *Méthode d'ordre N* [Dema] p 67

Proposition 3.1. *comparaison de différentes méthodes* [Dema] p 67

4 Applications en géométrie

4.1 Extremums et convexité

Théorème 4.1. *CN-CS d'ordre 1 et 2* [Rou] p 371

Exemple 4.1. *C-ex à l'ordre 1 et 2* [BMP] p 17-18

Exemple 4.2. *ordre 1* [Rou] p 379

Exemple 4.3. *ordre 2* [BMP] p 18

4.2 Lemme de Morse

Théorème 4.2. *Lemme préliminaire + lemme de Morse* [Rou]

Développements

- Lemme de Morse
- Newton

Références

- Rouvière
- Objectif agrégation
- Gourdon analyse
- Demailly
- Zuily Queffélec

Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Rapport du jury

Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon. L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode de gradient, preuve de la convergence de la méthode de gradient à pas optimal, ... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$, où A est une matrice symétrique définie positive, devrait être totalement maîtrisé. Les candidats devraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés et les équations normales qui y sont attachées. Enfin, les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extremums liés, la notion de multiplicateur de Lagrange et, là encore, des algorithmes peuvent être présentés et analysés.

La recherche d'extremums permet d'établir des résultats d'existence.
Cadre : Soit E un $\mathbb{R}$ -evn de dimension finie n . Soit U une partie non-vide de E . On munit E de la norme euclidienne $\|\cdot\|$, associée au produit scalaire.

1 Extremums : définitions et existence

1.1 Définitions

Définition 1.1. *minimum global, local, strict* [Rou] p 370

Remarque : on définit de même le maximum.

Exemple 1.1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x|$ min local en $(0, 0)$ pas strict
 $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x| + |y|$ min local strict en $(0, 0)$ Bouquins de prépa

1.2 Existence

Théorème 1.1. *Fonction définie sur un compact* [Tes] p 44

Exemple 1.2. *Norme sur $S_\infty(0, 1)$* [Tes] p 50

Application 1.1. *Equivalence des normes en dim finie* [Tes] p 49

Conséquences :

Définition 1.2. *Fonction coercive* [Tes] p 46

Remarque : Cas U non borné

Théorème 1.2. *Coercive $\Rightarrow$ minorée et atteint sa borne inf* [Tes] p 46

Exemple 1.3.
$$\begin{aligned} f : (R)^2 &\rightarrow (R) \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Application 1.2. *Théorème de d'Alembert* [Tes] p 48

Théorème 1.3. *f continue, strictement >0 , qui tend vers 0 au bord de U alors majorée et atteint sa borne inf* [Tes] p 48

Exemple 1.4.
$$\begin{aligned} f : (R) &\rightarrow (R) \\ x &\mapsto \exp^{-x^2} \end{aligned}$$

1.3 Théorème de projection

Théorème 1.4. *Théorème de projection* [BMP] p 95

Application 1.3. *Théorème de Motzkin* [Tes] p 265

Application 1.4. *Théorème des moindres carrés* [Rou] p 384

2 Extremums et calcul différentiel

Dans cette partie, on suppose U ouvert.

2.1 Ordre 1

Théorème 2.1. *CN d'ordre 1* [Rou] p 371

Exemple 2.1.
$$\begin{aligned} f : (R)^2 &\rightarrow (R) \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^4 \end{aligned} \quad \text{[Rou] p 380}$$

Exemple 2.2. *Contre-exemple : pas suffisant* $f : x \mapsto x$

Application 2.1. *Théorème de Rolle* [Tes] p 71

Application 2.2. *Théorème de Darboux* [Goub] p 78

2.2 Ordre 2

Théorème 2.2. *CN d'ordre 2* [Rou] p 371

Exemple 2.3.
$$\begin{aligned} f : (R)^2 &\rightarrow (R) \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^4 \end{aligned} \quad \text{[Rou] p 378}$$

Exemple 2.4. *Contre-exemple :*
$$\begin{aligned} f : (R)^2 &\rightarrow (R) \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^3 \end{aligned} \quad \text{[BMP] p 18}$$

Théorème 2.3. *CS d'ordre 2* [Rou] p 371

Exemple 2.5.
$$\begin{aligned} f : (R)^2 &\rightarrow (R) \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} \end{aligned} \quad \text{[Rou] p 379}$$

Exemple 2.6. *Contre-exemple :*
$$\begin{aligned} f : (R)^2 &\rightarrow (R) \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^4 \end{aligned} \quad \text{[BMP] p 18}$$

2.3 Problèmes sous contraintes

Théorème 2.4. Extrema liés [Rou] p 372

Remarque : Multiplicateurs de Lagrange

Remarque : Interprétation géométrique [BMP] p 20

Exemple 2.7. Contre-exemple : [BMP] p 21

Application 2.3. Diagonalisation des endomorphismes symétriques [BMP] p 21

Application 2.4. Inégalité arithmético-géométrique [Goub] p 319

3 Autres outils

3.1 Fonctions convexes

On suppose que U est un convexe non-vide de E .

Définition 3.1. fonction convexe / strictement convexe

Théorème 3.1. CN d'ordre 1 et 2 : suffisantes si f convexe [BMP] p 30

Exemple 3.1. $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \exp^x$

Théorème 3.2. f strict convexe et admet un min, alors il est global [Rou] p 381

Application 3.1. Point de Fermat [BMP] p 30 [Rou] p 387

Application 3.2. Ellipsoïde de John Loewner [FGNc] p 229

3.2 Fonctions holomorphes

Théorème 3.3. Principe du maximum [Tes] p 228

Application 3.3. Lemme de Schwarz [Tes] p 230

Application 3.4. Théorème de l'application ouverte [Tes] p 233

3.3 Transformée de Fourier

Théorème 3.4. Inégalité isopérimétrique [Tes] p 184

4 Algorithmes de recherche

4.1 Méthode de Newton

[Rou] p 152

4.2 Méthode du gradient à pas optimal

[Tes] p 276

[HU]

Développements

- Extremas liés
- Ellipsoïde de John Loewner

Références

- Rouvière
- Testard, Analyse mathématique : La maîtrise de l'implicite
- Objectif agrégation
- Gourdon analyse
- Orlaux X ENS algèbre 3
- bouquin prépa
- Hiriart Urruty

Leçon 220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Rapport du jury

C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase.

Enfin, il n'est pas malvenu d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon par exemple autour de la notion de problèmes raides et de la conception de schémas implicites pour autant que la candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

1 Existence, unicité et domaine de définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On considère l'équation $y'(t) = f(t, y(t)) \dots$ [Dema] p 125

Définition 1.1. *Solution* [Dema] p 125

1.1 Existence et unicité des solutions

Définition 1.2. *Problème de Cauchy* [Dema] p 126

Définition 1.3. *Fonction localement lip.* [Goub] p 354

Lemme 1.1. *forme intégrale* [Dema] p 131

Théorème 1.1. *Cauchy Lipschitz local* [Goub] p 354

Définition 1.4. *Solution maximale* [Goub] p 354

Corollaire 1.1. *C-L : $\exists!$ solution maximale* [Goub] p 356

Exemple 1.1. $e^{-t^2} + y^2$ [Les] p 19

Exemple 1.2. *C-ex : $y' = \sqrt{y}$ pas loc lip ; solution pas unique* [Goub] p 356

Théorème 1.2. *Péano* [Goub] p 355

Définition 1.5. *Fonction globalement lip* [Rou] p 170

Théorème 1.3. *C-L global* [Rou] p 170

Exemple 1.3. $y'' = -\sin y$ [Rou] p 172

Théorème 1.4. *Lemme de Gronwall* [Goub] p 377

Application 1.1. $y'' + q(t)y = 0$ [Goub] p 378

1.2 Principe de majoration a priori

On se place dans $\Omega =]a, b[\times \mathbb{R}^n$

Théorème 1.5. $T^* = b$ ou $T^* < b$ et $|y| \xrightarrow{b} \infty$ + idem avec a [QZ] p 371

Corollaire 1.2. *Prolongement des solutions* [QZ] p 371

Exemple 1.4. $y' = \frac{y^2}{1+y^2}$ [QZ] p 373

1.3 Cas des équations linéaires

Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, soit $B : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Théorème 1.6. *Espace des solutions* [Goub] p 358

Exemple 1.5. $y' + y = \sin t$ [Goub] p 361

Définition 1.6. *Wronskien* [Goub] p 358

Proposition 1.1. *Wronskien toujours nul ou ne s'annule jamais* [Goub] p 359

1.4 Exemples non-linéaires en dimensions 1 et 2

1.4.1 Équation de Bernoulli

Équation + comment la résoudre [Dema] p 164

Exemple 1.6. $y' - 2ty = -ty^2$ [Les] p 49

Exemple 1.7. $y' = y^2$, solutions maximales mais pas globales [Dema] p 165

1.4.2 Équation de Ricatti

Équation + comment la résoudre **Attention au z qui manque** [Dema] p 165

Exemple 1.8. $(1 - t^3)y' + t^2y + y^2 - 2t = 0$ [Dema] p 165

1.4.3 Pendule simple

unique solution [FGNf] p 285

1.4.4 Lotka Volterra

unique solution maximale qui est en fait globale [FGNf] p 250

2 Étude qualitative des solutions**2.1 Zéros des solutions****Théorème 2.1.** Sturm [FGNf] p 135**Théorème 2.2.** Sturm périodique [QZ] p 407Attention! Existence d'une solution sur $\mathbb{R}$ par Gronwall**Exemple 2.1.** $y'' - y = 0$ et $Y'' + y = 0$ [QZ] p 408**2.2 Développement en série entière des solutions****Théorème 2.3.** Solutions développables en séries entières [QZ] p 408**Exemple 2.2.** Équation de Bessel [FGNf] p 101**2.3 Stabilité des équations différentielles autonomes**On considère $(E) : y' = f(y)$, $f \in \mathcal{C}^1$ **Définition 2.1.** Point d'équilibre stable, instable, asymptotiquement stable [QZ] p 380

Méthode : pour étudier la stabilité, on se ramène au linéarisé

Théorème 2.4. Liapounov [Rou] p 138**2.4 Exemples d'études qualitatives en dimension 1 et 2****2.4.1 Bernoulli** $y' = y^2$, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable [Dema] p 165**2.4.2 Équation linéaire en dimension 2** $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, cas en fonction des valeurs propres + portraits de phase en annexe [Dema] p 291 ([QZ])**2.4.3 Pendule simple**

Comportement en fonction des conditions initiales [FGNf] p 285

2.4.4 Lotka Volterra

Les solutions sont périodiques [FGNf]

Développements

- Lyapounov
- Cauchy Lipschitz

Références

- Gourdon analyse
- Zuily Queffelec
- Demailly
- Rouvière
- FGN an4
- Lesfari

Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Rapport du jury

On attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions (dans le cas de la dimension finie, bien sûr). Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. [Goub] p 357

1 Généralités

1.1 Existence et unicité

Définition 1.1. Équation différentielle d'ordre p - situation homogène [Goub] p 357

Proposition 1.1. Forme intégrale du problème [Les] p 9

Rq : comment se ramener à l'ordre 1 [Goub] p 357

Exemple 1.1. Ordre 2 à l'ordre 1 (exo 1 2a) [Goub] p 361

Théorème 1.1. Cauchy-Lipschitz linéaire [Goub] p 358 [Rou]

Exemple 1.2. Dans 1.1, d'après CL, à condition initiale donnée, on a existence et unicité de la solution.

Rq : écriture pour les équations d'ordre p . [Goub] p 358

Exemple 1.3. C-ex à l'existence globale [Rou]

Exemple 1.4. C-ex : dans le cas non linéaire, pas unicité $y' = \sqrt[3]{y^2}$

1.2 Structure de l'espace des solutions

Théorème 1.2. Ev des solutions + dimension [Goub] p 358

Corollaire 1.1. Espace affine dans le cas non-homogène [Goub] p 358

Rq : cas de l'ordre p [Goub] p 358

Définition 1.2. Wronskien [Goub] p 358

Exemple 1.5. Wronskien $y'' = ay' + by$ [Goub] p 359

Proposition 1.2. Rang indépendant de t [Goub] p 359

Corollaire 1.2. Les solutions forment une base ssi ... [Goub] p 359

Application 1.1. Entrelacement de Sturn [FGNf] p 135

2 Résolution explicite

2.1 Cas de coefficients constants

2.1.1 Résolution du système homogène

Théorème 2.1. Solution générale du système homogène [Les] p 75

Application 2.1. $\exp(A + B) = \exp A \exp B$ [Pom] p 322

Proposition 2.1. Cas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ [Les] p 75

Exemple 2.1. Exo 2a [Goub] p 365

Proposition 2.2. Expression des solutions à l'ordre p [Goub] p 361

Exemple 2.2. Exo 1 2 a cas homogène [Goub] p 361

2.1.2 Résolution du système non-homogène

Rappel : L'espace des solutions non-homogènes est un espace affine. Si on connaît l'espace vectoriel des solutions homogènes, on n'a plus qu'à trouver une solution particulière. Soit on en voit une directement, soit :

Théorème 2.2. Solution non-homogène avec variation de la constante [Dema] p 202,203

Exemple 2.3. particule avec charge électrique [Dema] p 203 [FGNf] p 155

Exemple 2.4. Exo 11a [Goub] p 361

2.2 Cas de coefficients variables

2.2.1 Cas $n=1$

Théorème 2.3. Solutions homogènes [Goub] p 359

Proposition 2.3. Solution inhomogène : variation de la constante [Goub] p 359

Exemple 2.5. exo 11b [Goub] p 361

Exemple 2.6. Exo 12c [Goub] p 361

Proposition 2.4. Méthode de Liouville (abaissement de l'ordre) [Goub] p 360

Exemple 2.7. Pommelet ?

Méthode : dans certains cas, on peut chercher des solutions DSE au voisinage de 0 : [Les] p 30-31

Exemple 2.8. Équation de Bessel [FGNf] p 101

2.2.2 Cas général

Pas de méthode pratique en dimension n mais :

Proposition 2.5. *Si on connaît une base de solutions homogènes .. [Goub] p 359*

3 Étude qualitative

3.1 Étude de stabilité

Définition 3.1. *Solution stable et asymptotiquement stable [Dema] p 281*

Théorème 3.1. *Cas homogène à coefficients constants [Dema] p 284*

Lemme 3.1. *Gronwall [Goub] p 378*

Corollaire 3.1. *(2) majoration de la solution [Goub] p 378*

Théorème 3.2. Lyapounov [Rou] p 132

3.2 Étude des systèmes linéaires sur $\mathbb{R}^2$

Définition 3.2. *Système [Dema] p 290*

Proposition 3.1. *Valeurs propres réelles + dessins [Dema] p 290*

Proposition 3.2. *Valeurs propres non réelles + dessins [Dema] p 293*

Développements

- Lyapunov
- Cauchy Lipschitz linéaire

Références

- Gourdon analyse
- Lesfari
- Demailly
- Rouvière
- FGN an4
- Pommellet

Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Rapport du jury

Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle (bornée), et qu'ils en maîtrisent le concept.

1 Suites numériques et convergence

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. Suite numérique [Amr] p 1

Exemple 1.1. Suite arithmétique, suite géométrique [Goub] p 193

Définition 1.2. Suite convergente + formule + suite divergente [Amr] p 13

Exemple 1.2. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ [Amr] p 12

Exemple 1.3. Suites arithmétique et géométrique [Goub] p 193

Proposition 1.1. Toute suite numérique convergente est bornée [Amr] p 12

Théorème 1.1. Croissant majoré, décroissant minoré [Amr] p 32

Exemple 1.4. $u_n = 1/n$

Théorème 1.2. Gendarmes [Amr] p 19

Exemple 1.5. $u_n = \frac{\sin n}{n}$

1.2 Valeur d'adhérence

Définition 1.3. Suite extraite [Amr] p 14

Définition 1.4. Valeur d'adhérence [Amr] p 15

Proposition 1.2. convergence et valeur d'adhérence [Amr] p 15

Exemple 1.6. $(-1)^n$ [Amr] p 15

Exemple 1.7. C-ex : valeur d'adhérence mais pas forcément convergence [Amr] p 15

Proposition 1.3. Convergence et convergence des suites extraites [Amr] p 15

1.3 Critères de convergence

Suites adjacentes

Définition 1.5. Suites adjacentes [Amr] p 33

Théorème 1.3. Convergence sur les suites adjacentes [Amr] p 33

Exemple 1.8. [Amr] p 33

Application 1.1. Théorème des segments emboîtés [Amr] p 36

Application 1.2. Bolzano Weierstrass [Amr] p 36

Critère de Cauchy

Définition 1.6. Suite de Cauchy [Amr] p 34

Proposition 1.4. Sur les suites de Cauchy [Amr] p 34

Proposition 1.5. cauchy $\Rightarrow$ convergente (dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) [Amr] p 35-36

Exemple 1.9. Suite pas de Cauchy donc divergente [Amr] p 36

Moyenne de Césaro

Théorème 1.4. Césaro [Amr] p 53

Exemple 1.10. C-ex : la réciproque est fausse [Amr] p 53

Exemple 1.11. [Amr] p 54

1.4 Limites inférieure et supérieure

Définition 1.7. $\liminf$ $\limsup$ [Amr] p 353

Exemple 1.12. [Amr] p 353

Proposition 1.6. Inégalités [Amr] p 354

Proposition 1.7. Plus petite / plus grande valeur d'adhérence [Amr] p 354

Rq : $\liminf$ $\limsup$ et majoration/minoration [QZ]

2 Comportement asymptotique des suites

2.1 Relations de comparaison

Définition 2.1. Domination [Amr] p 25

Exemple 2.1. De domination [Amr] p 25

Définition 2.2. Négligeable [Amr] p 25

Exemple 2.2. négligeable [Amr] p 26

Proposition 2.1. Domination et négligeabilité + corollaire [Amr] p 26

Définition 2.3. suites équivalentes [Amr] p 26

Proposition 2.2. CNS d'équivalence [Amr] p 27

Proposition 2.3. Partition d'un entier en parts fixées [FGNe]

2.2 Vitesse de convergence

Définition 2.4. *Convergence géométrique* [Amr] p 40

Théorème 2.1. *d'Alembert* [Amr] p 40

Exemple 2.3. *CS pas CN* [Amr] p 41

Proposition 2.4. *Cauchy* [Amr] p 42

Définition 2.5. *Convergence quadratique* [Amr] p 42

Théorème 2.2. *CS de convergence quadratique* [Amr] p 43

2.3 Sommation de relations de comparaison

Théorème 2.3. *Sommation des relations de comparaison* [Goub] p 202

Application 2.1. *Série harmonique* [Goub] p 202

3 Suites récurrentes

3.1 Définition

Définition 3.1. *Suite récurrente* [Amr] p 38

Théorème 3.1. *continuité + corollaire* [Amr] p 38

Exemple 3.1. [Amr] p 38

Proposition 3.1. *Dépendance en la fonction* [Amr] p 38

Exemple 3.2. [Amr] p 39

3.2 Un exemple : les suites homographiques

Définition 3.2. *Suite homographique* [Goub] p 193

Proposition 3.2. *sur les suites homographiques* [Goub] p 193

Exemples ? Applications ?

3.3 Application : méthode de Newton

Théorème 3.2. Méthode de Newton [Rou]

3.4 Application : processus de Galton Watson

Sans réf!

Développements

- Newton
- Partition d'un entier en parts fixées

Références

- Gourdon analyse
- El Amrani
- Zuily Queffelec
- X ENS analyse 2
- Rouvière

Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Rapport du jury

...

On considère des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappels :

Définition 0.3. *Relations de comparaison* [Goub] p 86

Définition 0.4. *Echelle de comparaison* [Goub] p 86

Définition 0.5. *Développement asymptotique* [Goub] p 87

Exemple 0.3. $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ [Goub] p 87

1 Développements asymptotiques de fonctions

1.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.1. *Formule de Taylor Young* [Goub] p 88

Application 1.1. *TCL* [QZ]

Exemple 1.1. [Goub] p 89 dont $(1+x)^\alpha$

1.2 Opérations sur les développements limités

1.2.1 Somme et produit

Proposition 1.1. *Combinaison linéaire et multiplication* [Rom] p 210

Exemple 1.2. ch , sh et $\frac{e^x}{1+x}$ [Rom] p 210, 211

1.2.2 Composition de développements limités

Théorème 1.2. *Composition* [Rom] p 211

Exemple 1.3. [Rom] p 212

1.2.3 Intégration terme à terme

Théorème 1.3. *Intégration terme à terme* [Goub] p 88

Exemple 1.4. [Goub] p 90

1.3 Fonctions définies par une intégrale

1.3.1 Équivalent d'une primitive

Théorème 1.4. *Intégration des relations de comparaison* [Goub] p 159

Exemple 1.5. [Goub] p 160

Application 1.2. $\frac{g'}{g} \sim \frac{\mu}{x}$ exo 7 [Goub] p 168

Exemple dans Dieudonné, calcul infinitésimal p 97

1.3.2 Intégrales à paramètre : méthode de Laplace

Théorème 1.5. *Méthode de Laplace* [Rou] p 349

Exemple 1.6. Γ [Rou] p 349

Application 1.3. *Formule de Stirling* [Rou] p 353

2 Développements asymptotiques de suites et séries

2.1 Séries à termes positifs

Théorème 2.1. *Règle de Raab Duhamel* [Goub] p 205

Exemple 2.1. $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+a}{n+b}$ [Goub] p 210

Théorème 2.2. Partition d'un entier en parts fixées [FGNe]

2.2 Sommation des relations de comparaison

Théorème 2.3. *Équivalents de sommes partielles et des restes* [Goub] p 202

Exemple 2.2. $C\text{-ex}$: u_n et v_n de signes opposés [Rom] p 217

Application 2.1. *Série harmonique* [FGNd] p 156

2.3 Suites récurrentes

(Méthode des petits pas)

Théorème 2.4. $x_{n+1} = f(x_n)$; dvpt asymptotique de f , alors dvpt de x_n [Rom] p 221

Exemple 2.3. $\sin x$ et $\ln(1+x)$

Théorème 2.5. Méthode de Newton [Rou]

2.4 Comparaison série-intégrale

Proposition 2.1. *Comparaison série-intégrale* [Goub] p 204

Exemple 2.4. *Série harmonique* [FGNd] p 156

Exemple 2.5. Exo 6 (1b) [Goub] p 213

Développements

- Newton
- Partition d'un entier en parts fixées

Références

- Gourdon analyse
- Rombaldi, Analyse harmonique réelle
- Oaux X ENS
- Rouvière

Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

Rapport du jury

Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin u_n$. Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués. Cette leçon doit être l'occasion d'évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes, d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton, algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler, . . . L'aspect vectoriel est souvent négligé. Par exemple, le jury attend des candidats qu'ils répondent de façon pertinente à la question de la généralisation de l'algorithme de Newton dans $\mathbb{R}^2$.

Cadre : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie ; Soit $f : I \rightarrow E$ telle que $I \in E$. Pour $u_0 \in I$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

1 Dépendance en f

1.1 f monotone

$E = \mathbb{R}$

Proposition 1.1. f croissante ; f décroissante [Goub] p 192-193

Exemple 1.1. $x \mapsto x^2$

1.2 f continue

Proposition 1.2. Si u converge vers l et f continue en l [Goub] p 192

Exemple 1.2. $I = [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ [Goub] p 194

Théorème 1.1. $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. u converge ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ [FGNd] p 83

1.3 f affine

Définition 1.1. et théorème Suites arithmétiques [Goub] p 193

Définition 1.2. et théorème Suites géométriques [Goub] p 193

Définition 1.3. et théorème Suites arithmético-géométriques [Rom] p 260

1.4 f homographie

Définition 1.4. Suite homographique [Goub] p 193

Proposition 1.3. prop sur une suite homographique [Goub] p 193

Exemple 1.3. $f(x) = \frac{ax+1}{x+a}$

1.5 Récurrence linéaire à coefficients constants : $\mathbb{C}^n$

$u_{n+1} = a_1 u_n + \dots + a_h u_{n-h+1}$ alors $U_{n+1} = A U_n$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition 1.4. polynôme caractéristique, racines, expression de u_n [Goub] p 194

Exemple 1.4. Suite de Fibonacci

2 Étude des points fixes

2.1 Théorème du point fixe

Théorème 2.1. Théorème du point fixe [Goub] p 21

Exemple 2.1. Ex : Si $k = 1$ [Hau] p 149

Corollaire 2.1. si $\exists n, f^n$ contractante [Goub] p 23

Application 2.1. Cauchy-Lipschitz [Dema] p 138-140

2.2 Classification des points fixes

2.2.1 Cas $E = \mathbb{R}$

Définition 2.1. Point attractif, super attractif et répulsif [Dema] p 95-96

Rq : $f' = 1$: on ne peut rien dire [Dema] p 96

Exemple 2.2. [Dema] p 97

Illustration : [Rou] p 150

2.2.2 Cas $E = \mathbb{R}^n$

Définition 2.2. Rayon spectral [Dema] p 106

Théorème 2.2. /dfn Point attractif ; caractérisation [Dema] p 109

2.2.3 Points périodiques et orbites ($E = \mathbb{R}$)

Définition 2.3. Point n -périodique

Théorème 2.3. Sarkowski [FGNd] p 89

Exemple 2.3. Fonction tente [FGNd] p 91

Exemple 2.4. C-ex : Il faut I stable : $f : x \in [0, 1/2] \mapsto 1/(1-x) \in [1, 2]$ n'admet que des points de période 3

3 Applications

3.1 Méthode de Newton

Théorème 3.1. *Méthode de Newton* [*Rou*] p 152

3.2 Méthode de la sécante

[*Dema*]

3.3 Méthode du gradient à pas optimal

Théorème 3.2. *Gradient à pas optimal* [*HU*]

3.4 Processus de Galton-Watson

Développements

- Méthode de Newton
- Gradient à pas optimal

Références

- Gourdon analyse
- Demailly
- Rombaldi
- Oraux X-ENS analyse 1
- Rouvière
- Hauchecorne

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Rapport du jury

Les propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle sont attendues. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation.

Pour les candidats solides, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon.

Pour les candidats aguerris, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

1 Fonctions monotones

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. *fonction croissante, décroissante, monotone (+ strictement)* [RDO] p 118

Exemple 1.1. *Exp est monotone : strictement croissante*

Proposition 1.1. *sur les fonctions monotones* [RDO] p 118,119

exemples

Rq : l'ensemble des applications monotones n'est pas un sev **pourquoi?**

Exemple 1.2. *Fonction de répartition d'une variable aléatoire* **Trouver une ref**

1.2 Limites et continuité

Théorème 1.1. *Limite monotone + corollaires* [RDO] p 119

Théorème 1.2. *Points de discontinuité dénombrables* [RDO] p 120

Exemple 1.3. *Fonction strictement croissante discontinue sur un ensemble dense* [Hau] p 190

Théorème 1.3. *continuité d'une fonction monotone* [RDO] p 121

Théorème 1.4. *fonctions réciproques* [RDO] p 121

Exemple 1.4. *sin* [RDO] p 126

Théorème 1.5. *Homéo $\Rightarrow$ strictement monotone* [RDO] p 121

1.3 Dérivabilité

Théorème 1.6. *Monotonie et dérivée à droite* [RDO] p 122

Exemple 1.5. *C-ex : escalier de Cantor (croissante continue dérivable pp de dérivée nulle)* [Goub] p 66

Théorème 1.7. *Caractérisation des fonctions monotones* [RDO] p 122

Exemple 1.6. *$t \mapsto t^3$: c'est l'intérieur!!!* [RDO] p 123

Théorème 1.8. *Fonction monotone = dérivable pp* [ADMIS] (rapport du jury)

Exemple 1.7. *Escalier de Cantor*

1.4 Comparaison séries/intégrales

Proposition 1.2. *Comparaison série/intégrale* [Goub] p 204

Exemple 1.8. *Série harmonique* [Goub] p 204

2 Fonctions convexes

Soit Ω un convexe de $\mathbb{R}^n$

2.1 Définitions et premières propriétés (dimension quelconque)

Définition 2.1. *Fonction convexe* [Rom] p 233

Exemple 2.1. *Valeur absolue, exponentielle* [Rom] p 235

Proposition 2.1. *Caractérisation par l'épigraphe* [Rom] p 233

Proposition 2.2. *Comment se ramener à la dimension 1* [Rom] p 234

Proposition 2.3. *cl a coeffs positifs* [Rom] p 235

Exemple 2.2. *C-ex : produit pas nécessairement convexe* [Rom] p 235

Proposition 2.4. *Conditions pour composée convexe* [Rom] p 235

Exemple 2.3. *faux dans le cas général* [Rom] p 235

Proposition 2.5. *limite simple de fonctions convexes* [Rom] p 235

Proposition 2.6. *max convexe* [Rom] p 235

2.2 Log-convexité

Définition 2.2. *Fonction log convexe* [Rom] p 236

Proposition 2.7. *log convexe $\Rightarrow$ convexe* [Rom] p 236

Théorème 2.1. *Caractérisation* [Rom] p 236

Application 2.1. *somme log convexe* [Rom] p 236

Exemple 2.4. *Log convexité du déterminant* [FGNc]

2.3 Caractérisations et régularité en dimension 1

Théorème 2.2. *Courbe au dessous de ses cordes* [Rom] p 234

Proposition 2.8. $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ [Rom] p 237

Théorème 2.3. *pentés croissantes* [Rom] p 238

Exemple 2.5. *affine + constante ssi .. + app ?* [Rom] p 240

Théorème 2.4. *dérivabilité à droit* [Rom] p 242

Corollaire 2.1. *Continuité* [Rom] p 242

Exemple 2.6. *C-ex : seulement sur l'intérieur!!!* [Rom] p 243

Théorème 2.5. *Dérivée (à droite) croissante* [Rom] p 243

Théorème 2.6. *Fonction convexe dérivable, dérivée, tangentes* [Rom] p 244

Théorème 2.7. *Dérivée seconde* [Rom] p 246

Exemple 2.7. *exp, log* [Rom] p 246

Exemple 2.8. *Fonction sin* [Rom] p 246

Application 2.2. Processus de Galton Watson

2.4 Caractérisation en dimension supérieure

Théorème 2.8. *Caractérisation en dim n* [Rom] p 245

Application 2.3. *Fonctions quadratiques* [BMP] p 29

3 Applications

3.1 Inégalités de convexité

Proposition 3.1. *Inégalité arithmético géométrique* [Rom] p 252

Lemme 3.1. *Pour Holder* [Rom] p 247

Théorème 3.1. *Hölder* [Rom] p 248

Application 3.1. *Norme p* [Rom] p 249

Définition 3.1. *Cl convexe + stabilité* [Rom] p 248

Théorème 3.2. *Jensen + cor* [Rom] p 249

Théorème 3.3. *Jensen 2* [Rom] p 250

Inégalités en proba!!!!

3.2 Optimisation

Théorème 3.4. *CN d'ordre 1 et 2 : suffisantes si f convexe* [BMP] p 30

Exemple 3.1. $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \exp^x$

Théorème 3.5. *f strict convexe et admet un min, alors il est global* [Rou] p 381

Application 3.2. *Point de Fermat* [BMP] p 30 [Rou] p 387

Application 3.3. *Ellipsoïde de John Loewner* [FGNc] p 229

Proposition 3.2. Méthode de Newton [Rou]

Proposition 3.3. *Gradient à pas optimal* [HU]

Développements

- Newton
- Galton Watson

Références

- RDO3
- Gourdon analyse
- Rombaldi
- Oaux X ENS algèbre 3
- OA
- HU

Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Rapport du jury

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, ...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Série, somme partielle* [Amr] p 79

Définition 1.2. *Convergence* [Amr] p 80

Exemple 1.1. *Série géométrique* [Amr] p 80

Définition 1.3. *Reste* [Amr] p 80

Proposition 1.1. *Suite des restes $\rightarrow 0$* [Amr] p 80

1.2 Opérations sur les séries

Définition 1.4. *Somme, produit par un scalaire* [Amr] p 81

Proposition 1.2. *Structure de K -ev* [Amr] p 82

1.3 Liens suites-séries

Proposition 1.3. *série convergente $\Rightarrow$ suite $\rightarrow O$* [Amr] p 82

Exemple 1.2. *C-ex : pas suffisant* [Amr] p 82

Définition 1.5. *Diverge grossièrement*

Exemple 1.3. *sin, cos*

Définition 1.6. *Série télescopique*

Proposition 1.4. *convergence et limite cas télescopique* [Amr] p 82

Exemple 1.4. [Amr] p 83

1.4 Critère de Cauchy et absolue convergence

Théorème 1.1. *Critère de Cauchy* [Amr] p 83

Exemple 1.5. *Série harmonique* [Amr] p 84

Définition 1.7. *Série absolument convergente* [Amr] p 84

Proposition 1.5. *abs conv $\Rightarrow$ conv* [Amr] p 84

Exemple 1.6. *C-ex : Réciproque fausse* [Amr] p 85

Définition 1.8. *Série semi-convergente* [Amr] p 85

2 Séries à termes positifs

2.1 Convergence

Lemme 2.1. *cvge ssi sommes partielles majorées* [Amr] p 85

Théorème 2.1. *Règles de comparaison* [Amr] p 86

Exemple 2.1. [Amr] p 86

Exemple 2.2. *C-ex si les termes ne sont pas positifs* [?]

Proposition 2.1. *Comparaison avec $\frac{u_{n+1}}{u_n}$* [Amr] p 93

2.2 Comparaisons asymptotiques

Théorème 2.2. *Règles d'équivalences* [Amr] p 87

Exemple 2.3. *C-ex : termes positifs* [?]

Application 2.1. *Série harmonique* [Goua]

Application 2.2. *Série de Rieman* [Amr] p 88

Corollaire 2.1. *Règle $n^\alpha u_n$* [Amr] p 89

Exemple 2.4. *C-ex : [Hau]*

Définition 2.1. *Règles de domination (o et O)* [Amr] p 90

Rq : valable dans $\mathbb{C}$ en prenant le module!!! [Amr] p 90

2.3 Comparaison série-intégrale

Théorème 2.3. *Comparaison série-intégrale* [Amr] p 91

Théorème 2.4. *série et intégrale impropre* [Amr] p 92

Application 2.3. *Série de Bertrand* [Amr] p 92

2.4 Autres critères

Proposition 2.2. Comparaison avec $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ [Amr] p 93

Corollaire 2.2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots$ [Goub]

Proposition 2.3. Raab Duhamel [Goub]

3 Séries à terme général quelconque

3.1 Règles de Cauchy et D'Alembert

Théorème 3.1. Règle de Cauchy [Amr] p 94

Exemple 3.1. [Amr] p 94

Théorème 3.2. Règle de D'Alembert [Amr] p 95

Exemple 3.2. [Amr] p 95

3.2 Séries alternées

Définition 3.1. Série alternée [Amr] p 97

Théorème 3.3. Critère de Leibniz [Amr] p 97

Exemple 3.3. Ex et C-ex [Amr] p 97-98

3.3 Critère d'Abel

Proposition 3.1. Transformation d'Abel [Goub]

Théorème 3.4. Critère d'Abel [Amr] p 99

Application 3.1. cos sin [Amr] p 100

3.4 Produit de Cauchy

Définition 3.2. Série de Cauchy [Amr] p 101

Théorème 3.5. produit [Amr] p 101

Application 3.2. exp [Amr] p 103

3.5 Groupements et permutations

Définition 3.3. Groupements de termes consécutifs [Amr] p 104

Exemple 3.4. Groupement change la somme [Amr] p 104

Proposition 3.2. Sommation par paquets [Amr] p 104

Exemple 3.5. Modification de l'ordre des termes change la somme [Hau]

Définition 3.4. Série commutativement convergente [Amr] p 105

Théorème 3.6. abs $\Leftrightarrow$ comm [Amr] p 106

Théorème 3.7. Riemann [FGNa] p 217

3.6 Séries doubles

[Hau]

4 Utilisation de fonctions

4.1 Séries entières

Définition 4.1. Série entière [Amr] p 229

Proposition 4.1. Lemme d'Abel [Amr] p 230

Définition 4.2. Rayon de convergence [Amr] p 230

Théorème 4.1. Abel angulaire et taubérien faible [Goub]

Exemple 4.1. Ex et C-ex [Goub]

4.2 Série de Fourier

Définition 4.3. Série de Fourier + coefficients exp [Amr] p 298,301

Théorème 4.2. Formule de Parseval [Amr] p 310

Application 4.1. $\sum \frac{1}{n^2}$; $\sum \frac{1}{n^4}$ [Amr] p 318-319

Théorème 4.3. Formule sommatoire de Poisson + app [Goub]

Développements

- Théorème de Riemann
- Nombres de Bell
- Théorèmes d'Abel et taubérien faible
- Formule sommatoire de Poisson

Références

- El Amrani
- Gourdon analyse
- Hauchecorne
- FGNa1

Leçon 232 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Rapport du jury

Trop de candidats se limitent au simple cas où X est une variable scalaire. Il serait bon d'envisager les extensions des méthodes classiques dans le cas vectoriel. Au delà de la méthode de Newton, d'intéressants développements peuvent s'intéresser à la résolution de systèmes linéaires, notamment par des méthodes itératives. À propos de la version bidimensionnelle de la méthode de Newton, il convient de comprendre la généralisation en dimension supérieure de la division par la dérivée.

(! : définition de la convergence d'ordre p)

1 Principe des méthodes itératives

On se ramène à un problème de point fixe : $\varphi : x \mapsto x - \lambda f(x)$; avec λ bien choisie (qui permet à φ de vérifier les hypothèses du théorème qui suit) [Dema] p 95

1.1 Théorème du point fixe

Théorème 1.1. *Point fixe de Picart* [Dema] p 93

Proposition 1.1. *Estimation de la vitesse de convergence* [Dema] p 94

Proposition 1.2. *Généralisation* [Dema] p 94

Exemple 1.1. *Ex, C-ex* [Rou] p 148

1.2 Propriétés des points fixes

Définition 1.1. *Point attractif, , super attractif, répulsif + vitesses de convergence* [Dema] 95-96

Rq : cas douteux [Dema] p 96

Exemple 1.2. *ex cas douteux* [Dema] p 97

Proposition 1.3. *comportement graphique + dessins en annexe* [Dema] p 97

Exemple 1.3. *Exemple de résolution d'équation* [Dema] 98

2 Cas où F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2.1 Méthode par dichotomie

Théorème 2.1. *Valeurs intermédiaires* [Tes] p 126

Démonstration par dichotomie [Tes] p 126

2.2 Méthode de Newton

Théorème 2.2. *Méthode de Newton* [Rou]

2.3 Méthode de la sécante

Cas d'application ; Méthode [Dema] p 102

Théorème 2.3. *convergence* [Dema] p 102

Rq : inconvénient [Dema] p 102

3 Cas où F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$

3.1 Résolution de système linéaire : méthode de Gauss

Définition 3.1. *Matrice de transvection + description* [BMP] p 186

Définition 3.2. *Matrice de dilatation + description* [BMP] p 187

Définition 3.3. *Matrice de transposition + description* [BMP] p 187

Proposition 3.1. *Les opérations élémentaires décrites ci dessus ne changent pas l'ensemble des solutions* [Gri] p 37

Définition 3.4. *pivot, matrice échelonnée* [Gri] p 39 [CG] p 130

Rq : toute matrice peut se mettre sous forme échelonnée.

Proposition 3.2. *Description de la méthode de Gauss (grandes étapes + description de la première itération)* [Cia] p 73

Proposition 3.3. *Complexité* [Cia] p 80

3.2 Méthodes de descente

Théorème 3.1. *Gradient à pas optimal* [HU]

3.3 Newton Raphson

Principe [Dema] p 110

Théorème 3.2. *Méthode de Newton Raphson* [Dema] p 110

Exemple 3.1. [Dema] p 111

Développements

- Newton
- Gradient

Références

- Demailly
- Rouvière
- Testard
- OA
- Grifone
- H2G2
- Ciarlet
- HU

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

Rapport du jury

...

1 Méthodes classiques

1.1 Primitives usuelles

Théorème 1.1. *théorème fondamental d'intégration* [BP] p 22

Exemple 1.1. $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(a) - \arctan(b)$ [Goub] p 133

Exemple 1.2. *Fractions rationnelles : on fait une décomposition en éléments simples*
 $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x+1)^2} \right) = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
 [Goub] p 138

1.2 Intégration par parties

Théorème 1.2. *Intégration par parties* [BP] p 23

Exemple 1.3. *Intégrales de Wallis* : [Goub] p 126

1.3 Changement de variables (sur $\mathbb{R}^n$)

Théorème 1.3. *Changement de variable en dimension n* [Goub] p 334 [Can] p 221

Remarque : La formule est aussi valable en dimension 1, auquel cas : $|\det J\varphi| = |\varphi'|$

Exemple 1.4. Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1+\cos(\theta)\cos(t)} = \frac{2\pi}{\sin(\theta)}$ [Merc] p 270

Application 1.1. *Passage en coordonnées polaires* : [BP] p 245

Exemple 1.5. *Calcul du volume v_d de la boule unité de $\mathbb{R}^d$* :

$$v_d = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_d$$

$$- \text{ Si } d \text{ est pair : } v_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\frac{d}{2})!}$$

$$- \text{ Si } d \text{ est impair : } v_d = \frac{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} (\frac{d-1}{2})!}{d!} \text{ [BP] p 246}$$

Théorème 1.4. *Fubini Soit f une fonction continue. Sous certaines conditions (P et Q sont des pavés compacts par ex.)* [Goub] p 333

Exemple 1.6. *Intégrale de Gauss* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ [Goub] p 335}$$

2 Méthodes plus élaborées

2.1 Convergence dominée

Théorème 2.1. *Convergence dominée* [Goub] p 147

Exemple 2.1. *Intégrale de Fresnel* $\varphi = \int_0^{+\infty} \exp^{ix^2} dx = \exp^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [Goub] p 342

Théorème 2.2. *Inversion $\sum$ et $\int$* [Can] p 38

Exemple 2.2. $\int_0^{+\infty} \frac{x \exp^{-x}}{1+\exp^{-x}} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ [Can] p 39

2.2 Intégrale à paramètre

Théorème 2.3. *Continuité des intégrales à paramètre* [Goub] p 157

Théorème 2.4. *Dérivation des intégrales à paramètre* [Goub] p 158

Exemple 2.3. Intégrale de Gauss et app : cor de la formule sommatoire de Poisson
 [Goub]

2.3 Analyse complexe : le théorème des résidus

Définition 2.1. *Indice d'un point par rapport à un chemin* [BMP] p 63

Théorème 2.5. *Résidus* : [BMP] p 67

Exemple 2.4. ([AM] 249) $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \exp^{-|x|}$

Exemple 2.5. *Intégrale de Fresnel* [Can]

Application 2.1. Formule des compléments :

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \text{ [AM] p 246}$$

2.4 Théorème d'inversion de Fourier

Théorème 2.6. *Si on note $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier d'une fonction f , sous les bonnes hypothèses : $f(x) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x)$*
 [BP] p 308

Exemple 2.6. $\exp^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp^{ixt} \frac{2}{1+t^2} dt$ [BP] p 310

3 Calcul approché

3.1 Méthode des trapèzes

Théorème 3.1. [FGNa] p 20

[?]

3.2 Méthode de Monte-Carlo

[Tou] p 78

Références

- Briane-Pages
- Méthodix analyse
- Gourdon analyse
- Candelberger
- Amar Matheron
- Demailly

Développements

- Formule des compléments
- Intégrale de Fresnel

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Rapport du jury

Cette leçon peut être enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace, ...) relèvent aussi de cette leçon.

ATTENTION AUX CHANGEMENTS DE NOTATIONS POUR LES VARIABLES ENTRE LES BOUQUINS!!!!

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; Soit E un espace métrique. Soit $f : E \times I \rightarrow \mathbb{C}$.

1 Régularité

1.1 Continuité

Théorème 1.1. Continuité sous le signe intégral [QZ] p 306 *On intègre sur un intervalle de $\mathbb{R}$ une fct L^1 !!!*

Rq : on peut remplacer la 3e hyp par une domination sur tout compact [QZ] p 306

Exemple 1.1. Fonction Γ bien définie et continue [QZ] p 312

Exemple 1.2. C-ex [Hau] p 224 (fonction départ = continue en t mais arrivée = pas continue)

1.2 Dérivabilité

Théorème 1.2. dérivabilité sous le signe intégral [QZ] p 307

Rq : cas C^k [QZ] p 307

Exemple 1.3. $\Gamma \in C^\infty$ [QZ] p 312

Exemple 1.4. Exo 3 [Goub] p 164

Exemple 1.5. Cex [Hau] p 226

1.3 Holomorphie

Théorème 1.3. Holomorphie sous le signe intégral [QZ] p 308

Exemple 1.6. Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{Re(z) > 0\}$ [QZ] p 312

Rq : le thm permet de montrer le corollaire de la formule sommatoire de Poisson (cf plus loin)

2 Convolution

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1. Produit de convolution [BMP] p 113

Proposition 2.1. Convolution dans L^1 [BMP] p 114, 115

Proposition 2.2. Cas $L^p, L^{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ [BMP] p 116

Généralisation = inégalité de Young ([?])

Théorème 2.1. Convolution et dérivation [BMP] p 116

Application 2.1. Régularisation $g \in C^\infty$ [BMP] p 117

Exemple 2.1. D'une fonction C^∞ à support compact [BMP] p 117

2.2 Approximation de l'unité

Définition 2.2. Approximation de l'unité [BMP] p 119

Exemple 2.2. [BMP] p 119

Théorème 2.2. Approximation [BMP] p 119, 120

Application 2.2. Densité des fonctions C^∞ à support compact [BMP] p 121

App : noyau de Dirichlet et série de Fourier?

3 Transformations de Fourier

3.1 Définition et inversion

Définition 3.1. Transformée de Fourier [Can] p 352

Exemple 3.1. Transformée de Fourier de la gaussienne [Can] p 354

Proposition 3.1. Continue, linéaire, tend vers 0 en ∞ [Can] p 352

Proposition 3.2. TF et dérivées [Can] p 353

Proposition 3.3. injectivité [Can] p 359

Théorème 3.1. Inversion de Fourier + trad avec l'opérateur symétrie [Can] p 360

Exemple 3.2. Calcul d'une TF + calcul d'une intégrale avec la formule d'inversion [?] p 361

3.2 Transformée de Fourier et convolution

Proposition 3.4. Transformation de Fourier du produit de convolution [Can] p 367

Exemple 3.3. [Can] p 368

Proposition 3.5. Transformée de Fourier du produit [Can] p 368

4 Applications

Application 4.1. *Densité des polynômes orthogonaux* [*BMP*]

Application 4.2. *Formule sommatoire de Poisson + cor* [*Goub*]

Développements

- Densité des polynômes orthogonaux
- Formule sommatoire de Poisson

Références

- Candelpergher
- ZQ
- Hauchecorne
- Gourdon analyse
- OA

Leçon 240 : Produit de convolution, Transformation de Fourier. Applications.

Rapport du jury

Cette leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1 . En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soignée des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L1 dont la transformée de Fourier est aussi L1 ainsi que les inégalités de Young sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier paraissent nécessaires. Les candidats solides peuvent aborder ici la résolution de l'équation de la chaleur, de Schrödinger pour des fonctions assez régulières, ou la détermination des solutions élémentaires du Laplacien ou l'opérateur $k^2 - \frac{d^2}{dx^2}$. La transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées trouvent leur place ici mais sont réservées aux candidats aguerris. On peut aussi considérer l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications par exemple dans la direction du théorème de Paley-Wiener.

Ajouter densité des polynômes orthogonaux!!!!

On considère des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, mais les résultats s'étendent facilement à $\mathbb{R}^d$.

1 Convolution

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Lorsqu'il est défini : produit de convolution [BMP] p 113

Exemple 1.1. $f * 1_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}$ [BMP] p 113

Proposition 1.1. Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ [BMP] p 115

Exemple 1.2. convolée de gaussiennes [Can] p 295

Corollaire 1.1. $*$ définit une application bilinéaire et commutative sur L^1 ; structure d'algèbre normée. Attention : pas de neutre [BMP] p 115

Proposition 1.2. Convolution $L^p, L^{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ [BMP] p 116

Et même :

Théorème 1.1. Inégalité de Young [HL] p 149

1.2 Convolution et régularisation

Proposition 1.3. Convolée L^1 et C^0 bornée; dérivée [Can] p 288

Exemple 1.3. ?

Définition 1.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ [Can] p 289

Exemple 1.4. $\varphi : x \mapsto \exp(-\frac{1}{(x-a)(b-x)})1_{]a,b]}(x)$ [Can] p 289

Théorème 1.2. Régularité [Can] p 290

Théorème 1.3. Approximation par convolution [Can] p 290

Exemple 1.5. $\varphi = Ce^{-\frac{1}{1-x^2}}1_{]-1,1]}(x)$ [Can] p 292-293 [BMP] p 117

Exemple 1.6. régularisation gaussienne [BMP] p 117

Définition 1.3. approximation de l'unité [BMP] p 119

Exemple 1.7. Dilatation [BMP] p 119

Théorème 1.4. approximation [BMP] p 119

Application 1.1. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dense dans L^p [Can] p 295

Application 1.2. Lemme de Riemann-Lebesgue [Can] p 293

2 Transformée de Fourier

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1. Transformée de Fourier [Can] p 352

Proposition 2.1. Transformation de Fourier [Can] p 352 - [Far] p 130

Exemple 2.1. [Far] p 130

Exemple 2.2. C-ex : la TF n'est pas forcément $L^1 : 1_{[-a,a]}$ [Can] p 353

Proposition 2.2. de la TF [Can] p 353

Exemple 2.3. TF des gaussiennes normalisées [Can] p 358

2.2 Inversion

Lemme 2.1. *Inversion* [Can] p 358

Proposition 2.3. *Injectivité* [Can] p 359

Attention : on a SEULEMENT égalité presque partout !

Théorème 2.1. *Inversion de Fourier* [Can] p 360

Corollaire 2.1. $(\mathcal{F}^2 f)(\xi) = f(-\xi)$ pp ξ [Can] p 361

Théorème 2.2. *Inversion en un point de continuité* [Can] p 361

Exemple 2.4. $f_a : x \mapsto e^{-2\pi a|x|}$ [Can] p 361

Application 2.1. *définition fonction poids ; $L^2(I, \rho)$;* [BMP] p 110

Densité des polynômes orthogonaux [BMP] p 140

2.3 Transformée de Fourier et convolution

Théorème 2.3. $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$ [Can] p 366

Exemple 2.5. $f_a : x \mapsto \frac{a}{a^2 + x^2}$ [Can] p 367

Application 2.2. *densité de l'image de $\mathcal{F}$ dans C_0* [Can] p 367

Théorème 2.4. $\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$ [Can] p 368

2.4 Transformée de Fourier sur L^2

Exemple 2.6. *On ne peut pas étendre la définition de L^1* [Can] p 369

Lemme 2.2. *Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$* [Can] p 369

Théorème 2.5. *Définition de $\mathcal{F}$ sur L^2* [Can] p 370

Théorème 2.6. *Ca coïncide avec la déf de L^1* [Can] p 372

Théorème 2.7. *Plancherel* [Can] p 374

Application 2.3. *Calcul de $\mathcal{F}f$ par Plancherel + ex* [Can] p 377

3 Applications

3.1 Équation de la chaleur

[Can] p 404

3.2 La formule de Poisson

Théorème 3.1. Formule sommatoire de Poisson + cor [Goub]

Développements

- Densité des polynômes orthogonaux
- Formule sommatoire de poisson

Références

- Candelberger, Calcul intégral
- OA
- Farault, Calcul intégral
- Hirsch-Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle

Leçon 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

Rapport du jury

Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Il est regrettable de voir beaucoup de candidats qui maîtrisent raisonnablement les classiques du comportement au bord du disque de convergence traiter cette leçon en faisant l'impasse sur la variable complexe. C'est se priver de beaux exemples d'applications ainsi que du théorème de composition, pénible à faire dans le cadre purement analytique et d'ailleurs très peu abordé. Le jury attend aussi que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série.

1 Série entière, rayon de convergence et premières propriétés

Définition 1.1. Série entière [Goub] p 236

1.1 Rayon de convergence

Théorème 1.1. Lemme d'Abel [Goub] p 237

Définition 1.2. Rayon de convergence [Goub] p 237

Exemple 1.1. Rayon de convergence nul, fini ET infini [Goub] Ex 1 p 237

Proposition 1.1. Partition du plan complexe + dessin [BMP] p 47

Exemple 1.2. On ne sait pas ce qu'il se passe sur le cercle !!! [Amr] p 231

1.2 Calcul du rayon de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

Proposition 1.2. Comparaison des rayons de convergence de deux séries en fonction des coefficients [Amr] p 234

Proposition 1.3. Règle de d'Alembert [Amr] p 232

Application 1.1. Coefficients = fractions rationnelles [Amr] p 234

Exemple 1.3. [Amr] p 233

Proposition 1.4. Règle d'Hadamard [Amr] p 233

Exemple 1.4. qui ne marche pas avec d'Alembert [Amr] p 233-234

1.3 Somme et produit de séries

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

Définition 1.3. Série somme, série produit ($\sum c_n z^n$ de R_c) [Goub]

Proposition 1.5. Rayon de convergence de la série somme/produit [Goub] p 237

Exemple 1.5. Contre-exemples : on ne peut rien conclure de mieux : [Goub] p 238

2 Propriétés de la somme sur le disque de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R . On considère la fonction

$$f : \mathcal{B}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

2.1 Continuité, dérivabilité et holomorphie

Proposition 2.1. Convergence normale (donc uniforme) sur tout compact de $\mathcal{B}(0, R)$ [Amr] p 238

Proposition 2.2. continuité sur $\mathcal{B}(0, R)$ [Amr] p 239

Proposition 2.3. C^∞ [Goub] p 238

Proposition 2.4. Holomorphie [BMP] p 48

Exemple 2.1. [BMP]

2.2 Analyticit 

Définition 2.1. fonction développable en série entière, analytique [Goub] [BMP]

Exemple 2.2. C -ex : $R \neq 0$ et somme $\neq f$ [Goub] p 241

Théorème 2.1. zéros isolés [Goub] p 239

Théorème 2.2. Formule de Cauchy

Application 2.1. th m de Liouville [Goub] p 248

2.3 Comportement au bord du disque de convergence

On suppose $R \neq +\infty$. On se ramène au cas $R = 1$.

Proposition 2.5. Tous les comportements sont possibles [Hau] p 261

Théorème 2.3. Abel angulaire et taubérien faible [Goub]

Théorème 2.4. C -ex : réciproque fausse [Goub]

3 Applications

3.1 Dénombrement

Théorème 3.1. *Nombres de Bell* [FGNe]

Théorème 3.2. *Partition d'un entier en parts fixées* [FGNe]

3.2 Résolution d'équations différentielles

[Merc] p 230

Exemple 3.1. *Equation de Bessel* [FGNf]

3.3 Processus de Galton Watson

Théorème 3.3. *Galton Watson*

Développements

- Partition d'un entier en parts fixées
- Théorème d'Abel et théorèmes taubériens

Références

- Gourdon analyse
- OA
- El Amrani

Leçon 246 : Série de Fourier. Exemples et applications.

Rapport du jury

Les différents modes de convergence (L^2 , Fejer, Dirichlet, $:\cdot:$) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C^1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution des équations de la chaleur, de Schrödinger et des ondes dans le cadre de fonctions assez régulières peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon.

Cadre : on considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique.

1 Coefficients de Fourier

1.1 Définitions

Définition 1.1. a_n, b_n, c_n dans le cas L^1 + notation e_n [Goub] p 258

Définition 1.2. Série de Fourier [Goub] p 258

Proposition 1.1. Relations entre les coefficients [Goub] p 258

Proposition 1.2. Si f est paire ou impaire, valeurs de a_n ou b_n [Goub] p 258

Exemple 1.1. Exo 1 [Goub] p 260

1.2 Propriétés

Proposition 1.3. Propriétés sur les c_n [QZ] p 72 *Sans la convolution!* [Amr] p 301

Exemple 1.2. $f(t) = \frac{1}{1+\cos^2 t}$ [Amr] p 328

Proposition 1.4. Lemme de Riemann Lebesgue [BMP] p 126 + avec a_n et b_n [Amr] p 306

Proposition 1.5. Si f de classe C^k et C^{k+1} par morceaux .. [Amr] p 306

Théorème 1.1. Si on a une série trigo qui converge uniformément vers f .. [Amr] p 303 [QZ] p 72

1.3 Convolution

Définition 1.3. Produit de convolution [Amr] p 309 *Dans le cas L^1* [QZ]

Proposition 1.6. c_n et produit de convolution [Amr] p 309

Proposition 1.7. homéomorphisme d'algèbre [QZ] p 73

2 Convergence

2.1 Un cas de divergence

Théorème 2.1. Banach Steinhauss [Goub] p 404

Application 2.1. Il existe des fonctions dont la série de Fourier diverge en 0 [Goub] p 405

2.2 Convergence au sens de Césaro

Définition 2.1. Sommes de Césaro [BMP] p 127

Définition 2.2. Noyau de Dirichlet, noyau de Fejer [BMP] p 127

Proposition 2.1. $S_N = f * D_N$ et $\sigma_N = f * K_N$ [BMP] p 128

Théorème 2.2. Fejer [BMP] p 128

Application 2.2. Densité des polynômes trigo + inj de γ [BMP] p 128

2.3 Convergence de la série de Fourier

Théorème 2.3. Convergence de S_n [BMP] p 129

Théorème 2.4. Dirichlet [BMP] p 130

Exemple 2.1. $\sin^2$ [Amr] p 319

Proposition 2.2. convergence normale [BMP] p 130

Application 2.3. Exo 2 [Goub] p 262

Application 2.4. Exo 1, expression + calcul de sommes [Goub] p 262

Application 2.5. Formule sommatoire de Poisson + app [Goub] p 272

2.4 Fonctions de carré intégrable

Proposition 2.3. Espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, produit scalaire [BMP] p 123

Proposition 2.4. Expression des coefficients de Fourier [BMP] p 123

Proposition 2.5. Base hilbertienne de L^2 [BMP] p 123

Proposition 2.6. On a même : S_N projection sur $\mathcal{P}_N$ [BMP] p 123

Proposition 2.7. Expression de f dans la base (e_n) et convergence de S_N vers f dans L^2 [BMP] p 124

Théorème 2.5. Formule de Parseval [BMP] p 124

Application 2.6. cf. ex précédent $\sum \frac{1}{n^4}$ [Goub] p 262

Application 2.7. Equation de la chaleur [FGNf] p 49

Développements

- Formule sommatoire de Poisson
- Théorème de Banach Steinhauss

Références

- Gourdon analyse
- QZ
- El Amrani
- OA
- X ENS analyse 2

Leçon 260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Rapport du jury

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebychev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite). Le comportement des moyennes pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée.

Cadre : On considère des variables aléatoires à valeurs réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ [BL] p 53

1 Espérance

1.1 Définition et exemples

Définition 1.1. *Espérance et va centrée* [BL] p 53

Proposition 1.1. *Expressions dans les cas discret et à densité* [Ouv] p 115,190

Théorème 1.1. *Transport* [BL] p 53

Exemple 1.1. *Indicatrice* [BL] p 54

Exemple 1.2. *lois et leur espérance quand elle est définie* [BL] p 55

Définition 1.2. *Espérance d'un vecteur aléatoire* [BL] p 60

1.2 Propriétés

Proposition 1.2. $\mathbb{E}$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ [Ouv] p 18

Proposition 1.3. *Inégalité de Jensen* [BL] p 56

Exemple 1.3. $E(X)^2 \leq E(X^2)$ [BL] p 57

Définition 1.3. *Fonction de répartition* [BL] p 46

Proposition 1.4. *Expression de l'espérance avec la fonction de répartition* [BL] p 57

Rq : C'est bien ! Ça donne des critères d'intégrabilité

Proposition 1.5. *Inégalité de Markov* [BL] p 58

Définition 1.4. *Famille de va indépendantes* [BL] p 76

Exemple 1.4. *Dés rouge et bleu* [BL] p 76

Proposition 1.6. *Caractérisation de l'indépendance avec les fonctions boréliennes* [BL] p 79

Corollaire 1.1. *Espérance du produit de va indépendantes* [BL] p 80

Exemple 1.5. *Soit X une $\mathcal{N}(0,1)$, $Y = X^2$; égalité pour les espérances mais pas indépendantes* [BL] p 80

2 Moment d'ordre 2

2.1 Variance

Définition 2.1. *Cas carré intégrable : moment et moment absolu d'ordre 2* [BL] p 53

Définition 2.2. *Variance et écart type* [BL] p 56

Proposition 2.1. *Expression équivalente* [BL] p 56

Exemple 2.1. *Exemples (et prop)* [BL] p 57

Rq : dispersion [BL] p 57

Proposition 2.2. *Inégalité de Tchebitchev* [BL] p 59

2.2 Covariance

Proposition 2.3. *Inégalité de Schwarz* [Ouv] p 16 (écrire avec $\mathbb{E}$)

Ce qui permet de définir :

Définition 2.3. *Covariance* [Ouv] p 20

Proposition 2.4. *Sur la covariance et la variance* [Ouv] p 20

Rq : généralisation à $X \in \mathbb{R}^d$ et $Y \in \mathbb{R}^q$ avec une matrice de covariance

2.3 Application à l'indépendance

Définition 2.4. *Va non corrélées* [BL] p 80

Proposition 2.5. *Indépendantes de carré intégrable* $\Leftrightarrow$ [BL] p 80

Exemple 2.2. *Réciproque fausse* [BL] p 80

Rq : elle est vraie dans le cas Gaussien

Proposition 2.6. *Identité de Bienaymé* [BL] p 81

Proposition 2.7. *Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev* [BL] p 81

App : Bernstein + Weierstrass (cf plus loin) Vérifier!!!

3 Moments d'ordre p

3.1 Définition et propriétés

Définition 3.1. *Moment et moment absolu d'ordre p* [BL] p 53

Exemple 3.1. *Moments d'ordre 3 et 4 de $\mathcal{N}(0, 1)$* [sans ref](#)

Proposition 3.1. *Inégalités de Hölder et Minkowski (écrire avec les $\mathbb{E}$)* [Ouvb] p 15,16

Application 3.1. $L^p \subset L^q$ pour $p \leq q$ [Ouvb] p 17

(Rq : on en déduit que la convergence L^p implique la convergence L^q)

3.2 Fonction caractéristique et moments

Définition 3.2. *Fonction caractéristique* [BL] p 61

Proposition 3.2. *Propriétés de φ* [BL] p 62

Théorème 3.1. *Elle caractérise la loi* [BL] p 62

Exemple 3.2. [BL] p 63

Proposition 3.3. *Fonction caractéristique et moments* [BL] p 64

Application 3.2. *Si φ est analytique* [BL] p 65

Théorème 3.2. *Des moments* [BL] p 66

Exemple 3.3. *Les moments ne caractérisent pas toujours la loi!* [BL] ex 7 p 68

Définition 3.3. *Transformée de Laplace* [BL] p 66

Application 3.3. *Inégalité de Hoeffding* [Ouvb] p 133

Proposition 3.4. *Transformée de Laplace et moments* [BL] p 66

3.3 Fonction génératrice et moments

On prend X à valeurs dans $\mathbb{N}$!

Définition 3.4. *Fonction génératrice* [Ouvv] p 138

Proposition 3.5. *toutes sur la fonction génératrice* [Ouvv] p 138

Exemple 3.4. [Ouvv] p 139

Théorème 3.3. *Caractérisation des moments* [Ouvv] p 141

Application 3.4. Processus de Galton Watson [Cot] p 72

4 Moments et théorèmes limites

Suite de va iid, S_n .. [BL] p 131

4.1 Loi des grands nombres

Théorème 4.1. *Loi faible des grands nombres* [BL] p 132

Théorème 4.2. *Loi forte des grands nombres (admis!)* [BL] p 132

Exemple 4.1. X_i bernoulli de paramètre a [Sans ref - regarder cours breton](#)

Application 4.1. *Estimateur empirique fortement consistant* [Riv] p 8

Application 4.2. *Méthode de Monte Carlo* [Tou]

Application 4.3. Bernstein - Weierstrass [QZ]

4.2 Théorème central limite

Théorème 4.3. *TCL* [BL] p 136

Application 4.4. *Ex : calcul d'un intervalle de confiance* [BL] p 138

Développements

- Weierstrass
- Galton Watson

Références

- Ouvrard 1 et 2
- Barbe Ledoux

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Rapport du jury

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binômiale et de Poisson doit être discuté.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes devront être abordées (comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi). La notion de fonction génératrice pourra être abordée.

Pour aller plus loin, les candidats ambitieux pourront étudier les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables.

1 Variables aléatoires et lois discrètes

1.1 Définition

Définition 1.1. Variable aléatoire discrète [Ouv] p 20

Rq : souvent à valeurs dans $\mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n$

Proposition 1.1. Loi de probabilité $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ [Ouv] p 20

Exemple 1.1. [?] p 21 ? ? ?

1.2 Exemples

Donner les lois et à chaque fois un exemple de modélisation [Ouv] p 243 - 15,16

- uniforme
- géométrique
- bernoulli
- Poisson
- Hypergéométrique

2 Moments et indépendance

2.1 Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.1. Espérance [Ouv] p 115

Exemple 2.1. [Ouv] p 243

Proposition 2.1. Espérance d'une constante [Ouv] p 117

Proposition 2.2. Si X borné, l'espérance est définie [Ouv] p 117

Proposition 2.3. $(X \geq 0 \wedge EX = 0) \Rightarrow X = 0$ [Ouv] p 117

Proposition 2.4. positivité + cor [Ouv] p 117

Théorème 2.1. transfert [Ouv] p 118

Proposition 2.5. C'est une forme linéaire [Ouv] p 120

2.2 Variance

Proposition 2.6. Inégalité de Schwarz [Ouv] p 126

Définition 2.2. Variance [Ouv] p 127

Proposition 2.7. Expression de la variance [Ouv] p 128

Exemple 2.2. [Ouv] p 243

2.3 Fonction génératrice

Définition 2.3. Fonction génératrice [Ouv] p 138

Proposition 2.8. Sur la fonction génératrice [Ouv] p 138,139

Exemple 2.3. [Ouv] 139,140

Définition 2.4. Moment d'ordre p [Ouv] p 122

Proposition 2.9. Caractérisation des moments [Ouv] p 141

Application 2.1. Processus de Galton Watson [Cot]

2.4 Indépendance de variables aléatoires discrètes

Définition 2.5. Variables aléatoires indépendantes [Ouv] p 51 (carac en déf)

Proposition 2.10. Espérance du produit de deux v.a.d indépendantes [Ouv] p 129

Proposition 2.11. Somme de variables aléatoires indépendantes [Ouv] p 62

Exemple 2.4. Somme de deux variables aléatoires de Poisson [Ouv] p 64

Proposition 2.12. fonction génératrice d'une somme [Ouv] p 140

Rq : comme la fonction génératrice caractérise la loi, on peut retrouver la loi d'une somme en passant par G .

3 Théorèmes limites

Suite de v.a. iid, $S_n \dots$ [BL] p 131

3.1 Approximation d'une loi de Poisson

Théorème 3.1. Poisson [Ouv] p 226

(rq : ça correspond à la convergence en loi)

Exemple 3.1. Né le 1 janvier [Ouv] p 227

Théorème 3.2. Evénements rares de Poisson avec déf convergence en loi [Ouv] p 321 [Ouv] p 233

3.2 Loi des grands nombres

Théorème 3.3. *Loi faible des grands nombres* [BL] p 132

Théorème 3.4. *Loi forte des grands nombres (admis !)* [BL] p 132

Exemple 3.2. X_i bernoulli de paramètre a *Sans ref - regarder cours breton*

Application 3.1. *Estimateur empirique fortement consistant* [Riv] p 8

Application 3.2. Bernstein - Weierstrass

3.3 Théorème central limite

Théorème 3.5. *TCL* [BL] p 136

Application 3.3. *Ex : calcul d'un intervalle de confiance* [BL] p 138

Développements

- Galton Watson
- Weierstrass

Références

- Ouvrard 1 et 2
- Barbe Ledoux

Références

- [Ale] Alessandri. *Thèmes de Géométrie*.
- [AM] Amar and Matheron. *Analyse complexe*.
- [Amr] Mohammed El Amrani. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*.
- [Aud] Michèle Audin. *Géométrie*.
- [Bia] De Biasi. *Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne*.
- [BL] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilité*.
- [BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*.
- [BP] Marc Briane and Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration*.
- [Cala] Josette Calais. *Eléments de théorie des groupes*.
- [Calb] Josette Calais. *Extensions de corps, théorie de Galois*.
- [Can] Bernard Candelpergher. *Calcul intégral*.
- [CG] Caldero and Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*.
- [Cia] Philippe G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*.
- [Com] François Combes. *Algèbre et géométrie*.
- [Cot] Marie Cottrell. *Exercices de probabilités*.
- [Dema] Jean-Pierre Demailly. *Eléments d'analyse réelle*.
- [Demb] Michel Demazure. *Cours d'algèbre*.
- [dSP] Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*.
- [Eid] Jean-Denis Eiden. *Géométrie analytique classique*.
- [Far] Jacques Farault. *Calcul intégral*.
- [FG] Serge Francinou and Hervé Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre 1*.
- [FGNa] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS algèbre 1*.
- [FGNb] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS algèbre 2*.
- [FGNc] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS algèbre 3*.
- [FGNd] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS analyse 1*.
- [FGNe] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS analyse 2*.
- [FGNf] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS analyse 4*.
- [Goga] Michel Gognet. *Algèbre bilinéaire*.
- [Gogb] Michel Gognet. *Algèbre linéaire*.
- [Goua] Xavier Gourdon. *Algèbre*.
- [Goub] Xavier Gourdon. *Analyse*.
- [Goz] Ivan Gozard. *Théorie de Galois*.
- [Gri] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*.
- [Hau] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*.
- [HL] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle*.
- [HU] Jean-Baptiste Hirriart-Urruty. *Optimisation à l'analyse convexe*.
- [Laf] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*.
- [Les] Arnaud Lesfari. *Equations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles*.
- [Mera] Dany-Jack Mercier. *Cours de géométrie*.
- [Merb] Xavier Merlin. *Methodix Algèbre*.
- [Merc] Xavier Merlin. *Methodix, Analyse*.
- [Nou] Ivan Nourdin. *Agrégation de mathématiques, épreuve orale*.
- [Ouva] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : tome 1*.
- [Ouvb] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : tome 2*.
- [Par] Parent. *Exercices in numbertheory*.
- [Per] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*.
- [Pom] Alain Pommellet. *Cours d'analyse*.
- [QZ] Queffelec and Zuily. *Analyse pour l'agrégation*.
- [Ray] Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*.
- [RB] Jean-Jacques Risler and Pascal Boyer. *Algèbre pour la Licence 3, groupes, anneaux, corps*.
- [RDO] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Mathématiques spéciales 3, Topologie et éléments d'analyse*.
- [Riv] Vincent Rivoirard. *Statistique mathématique en action*.
- [Rom] Jean-Etienne Rombaldi. *Eléments d'analyse réelle*.
- [Rou] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*.
- [Szp] Szpriglas. *Mathématique Algèbre L3*.
- [Tau] Patrice Tauvel. *Géométrie*.
- [Tes] Frédéric Testard. *Analyse mathématique : la maîtrise de l'implicite*.
- [Tou] Paul S. Toulouse. *Thèmes de probabilités et statistique*.
- [Tru] Bernard Truffault. *Géométrie élémentaire*.
- [Ulm] Félix Ulmer. *Théorie des groupes, cours et exercices*.