Théorème de Sarkowski

Référence(s) :
– S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas - *Oraux X-ENS, analyse 1*, page(s)

Théorème 1

Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to I$ une fonction continue. S'il existe un point 3-périodique, alors : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un point n-périodique.

Étape 1

Soit K un segment de $f(I)$. Alors, il existe un segment $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.

On pose $K = [\alpha, \beta]$. Comme $K \subset f(I)$, on a : $\exists a, b \in I$, tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.
– Si $\alpha = \beta$, alors $L = \{\alpha\}$ convient.
– Si $a < b$:
Soit $A = \{x \in [a, b], f(x) = \beta\}$. Comme $b \in A$, A est un fermé non-vide minoré par a. Ainsi, l'ensemble A admet un minimum, soit v. On a : $f(v) = \beta$ et $\forall t \in [a, v[, f(t) < \beta$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Soit $B = \{x \in [a, v[, f(x) = \alpha\}$. L'ensemble B est un fermé non-vide majoré par b. Soit $u = \max B$. Alors $f(u) = \alpha$ et $\forall t \in]u, v[, f(t) > \alpha$.
Finalement :

$$u < v \text{ et } f([u, v]) = [\alpha, \beta]$$

Le segment $L = [u, v]$ convient.
– Cas $a > b$: symétrique.
(On considère $u = \max\{x \in [b, a], f(x) = \beta\}$ et $v = \min\{x \in [u, a], f(x) = \alpha\}$)

Étape 2

Supposons qu'il existe $I_0, ...I_{n-1}$ n segments inclus dans I tels que :

$$I_O \subset f(I_{n-1}) \text{ et } \forall k \in [|0, n-2|], I_{k+1} \subset f(I_k)$$

Alors : La fonction f^n admet un point fixe x_0 tel que $\forall k \in [|0, n-1|], f^k(x_0) \in I_k$

On notera $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1}$ une telle suite de segments.
– Comme $I_1 \subset f(I_0)$, il existe un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$
– Ainsi : $I_2 \subset f(I_1) \subset f^2(I_1)$ donc il existe un segment $J_2 \subset J_1$ tel que $f^2(J_2) = I_2$.
– Ainsi, par récurrence, on construit $J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \cdots \subset J_1 \subset I_0$ suite de segments tels que : $\forall k \in [|0, n-1|], f^k(J_k) = I_k$
– Enfin, $I_0 \subset f(I_{n-1}) \subset f^n(J_{n-1})$ donc il existe un segment $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $f^n(J_n) = I_0$
Comme $J_n \subset f^n(J_n), \exists x_0 \in J_n, f^n(x_0) = x_0$. Puis, par construction des J_k, $\forall k \in [|0, n|], f^k(x_0) \in I_k$ (car $\forall k, x_0 \in J_n \subset J_k$ et $f^k(J_k) = I_k$).

Étape 3

Preuve du théorème

Soit $a \in I$ un point 3-périodique. Soient $b = f(a)$ et $c = f^2(a)$; $b \neq a$ et $c \neq a$; $b \neq c$.
Les points b et c sont aussi 3-périodiques. Donc, on peut supposer $a = \min\{a, b, c\}$
– Cas 1 : $a < b < c$
Soit $I_0 = [a, b]$; soit $I_1 = [b, c]$. Comme $f(a) = b$ et $f(b) = c$, $I_1 \subset I_0$, c'est-à-dire : $I_1 \to I_0$.
De la même façon, on obtient $I_0 \to I_1$ et $I_1 \to I_1$.
On a : $I_1 \to I_1$ donc f admet un point fixe x_1 dans I_1.
On a : $I_1 \to I_0 \to I_1$, donc $\exists x_2 \in I_0$ tel que : $f^2(x_2) = x_2$. Comme $x_2 \neq b$, $x_2 \notin I_1$ donc $f(x_2) \neq x_2$ car $f(x_2) \in I_1$

Soit $n \geqslant 4$. On considère la suite $I_0 \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_0$ ($n-1$ fois I_1).

Alors : il existe $x_n \in I_0$, $f^n(x_n) = x_n$ et $\forall k < n$, $f^k(x_n) \in I_1$. Si $x_n = b$, on aurait $f^2(b) = a \notin I_1$: CONTRADICTION.

Donc $x_n \in I_0$ donc $\forall k < n, f^k(x_n) \in I_1$, donc $f^k(x_n) \neq x_n$

– Cas $a < c < b$: On raisonne de la même manière.

Finalement :

$$\forall n \geqslant 1, f \text{ admet un point } n \text{ périodique.}$$