Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

[1]

Référence :
– Michel Alessandri - *Thèmes de géométrie*

Théorème 1

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit K un convexe compact non-vide de V. Soit G un sous-groupe compact de $GL(V)$ tel que :

$$\forall u \in G, u(K) \subset K$$

Alors :

$$\exists x \in K, \forall u \in G, u(x) = x$$

Corollaire 1

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset O(q)$

Étape 1

Soit N une norme euclidienne sur V. Pour tout $x \in V$, soit $v(x) := \max_{u \in G} N(u(x))$. Alors : v définit une norme G-invariante sur G.

- Le groupe G est compact, donc $\forall x \in V, \{u(x), u \in G\}$ est compact, donc v est bien définie.
- $\forall x \in V, \forall u \in G, v(x) = v(u(x))$ car $\varphi_w : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ w & \longmapsto & w \circ u \end{array} \right.$ est une bijection, $\forall w \in G$.
- La fonction v est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, car N l'est.

  $\forall x \in V$, si $v(x) = 0$, alors : $N(x) = 0$ et donc $x = 0$.

  Comme $\forall u \in G, u$ est linéaire et N est une norme, on a :

$$\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, v(\lambda x) = |\lambda| v(x)$$

  Soient $x, y \in V$, il existe un $u_0 \in G$, $v(x+y) = N(u_0(x+y))$. Donc :

$$v(x+y) \leqslant N(u_0(x)) + N(u_0(y)) \leqslant v(x) + v(y)$$

  Par ailleurs, si $v(x+y) = v(x) + v(y)$, alors $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés et x et y sont positivement liés (car u_0 est une bijection).

Ainsi, v est une norme G-invariante sur V.

Étape 2

Preuve du théorème

La norme v est continue sur le compact K ; donc il existe un $a \in K$ tel que $v(a)$ soit minimale sur K.
Soit $u \in G$, alors $v(u(a)) = v(a)$ (car v est G-invariante).
Or, v est convexe donc ses ensembles de niveaux sont convexes, donc

$$v(\frac{u(a)+a}{2}) = v(a) \text{ d'où } v(u(a)+a) = v(u(a)) + v(a)$$

On est dans le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :
$\exists \lambda > 0, u(a) = \lambda a$. Mais $v(u(a)) = v(a)$ donc
– $\lambda = 1$ i.e. $u(a) = a$

1. Remarque : Ce résultat peut être démontré à partir du théorème de John-Loewner.

- $u(a) = a = 0$

Donc
$$\forall u \in G, u(a) = a$$

Étape 3

Preuve du corollaire

On munit G d'une nouvelle structure de groupe $(G, \square)$, avec :
$$\forall A, B \in G, A \square B = BA$$

Soit $\rho : \left| \begin{array}{ccc} (G, \square) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \\ A & \longmapsto & S \mapsto {}^tASA \end{array} \right.$. Alors :

- La fonction ρ est bien définie car $\forall A \in G, \rho(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ est inversible $(\rho(A)^{-1} = \rho(A^{-1}))$.
- ρ est un morphisme de groupes :
$$\rho(B \square A)(S) = \rho(AB)(S) = {}^t(AB)S(AB) = {}^tB{}^tASAB = \rho(B) \circ \rho(A)(S)$$
- ρ est continue : $\rho = b \circ \Delta$, avec :
  $b : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathcal{L}(\mathbb{R})) \\ (A, B) & \longmapsto & S \mapsto {}^tASB \end{array} \right.$ est continue car bilinéaire en dimension finie
  $\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ A & \longmapsto & (A, A) \end{array} \right.$ est continue car linéaire en dimension finie.

Ainsi, $\rho(G)$ est un sous-groupe (ρ morphisme et G groupe) compact (ρ continue et G compact) de $\mathrm{GL}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Soit $H := \{{}^tMM, M \in G\}$; Soit $K = \mathcal{C}(H)$ l'enveloppe convexe de H.
Comme G est compact, H l'est, puis K l'est aussi par le théorème de Carathéodory. De plus, comme $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $H \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est convexe, d'où : $K \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Enfin :
$$\forall A \in G, \forall M \in G, \rho(A)({}^tMM) = {}^tA{}^tMMA = {}^t(MA)(MA) \in H$$

Donc H est stable par $\rho(A)$, donc K aussi (par linéarité).

On peut donc appliquer le théorème :
$$\exists S \in K, \forall A \in G, S = \rho(A)(S) = {}^tASA$$

Comme $K \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $G \subset O(q_S)$, où $q_S : x \mapsto {}^txSx$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.