Indécidabilité de la terminaison d'un système de réécriture

Manon Ruffini

Définition 1 (***Terminaison d'un système de réécriture***)

<u>Entrée :</u> Un système de réécriture $\mathcal{R}$
<u>Sortie :</u> Oui lorsque $\mathcal{R}$ est terminant, i.e. il n'existe pas de terme t tel qu'il existe une réduction infinie à partir de t ($t \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}}$).

Théorème 1

La terminaison d'un système de réécriture est indécidable.

Démonstration :

Définition 2 (***Problème de l'arrêt uniforme***)

<u>Entrée :</u> Une machine de Turing $\mathcal{M}$
<u>Sortie :</u> Oui, lorsque tous les calculs de $\mathcal{M}$ sont terminants ; i.e. il n'existe pas de configuration K démarrant un calcul infini.

Lemme 1 (***admis***)

La problème de l'arrêt uniforme est indécidable.

On veut réduire le problème de l'arrêt uniforme au problème de terminaison d'un système de réécriture. Pour ça, on considère une machine de Turing $\mathcal{M}$.
On va définir un système de réécriture $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ à partir de $\mathcal{M}$, et montrer qu'il admet une réduction infinie ssi la machine $\mathcal{M}$ admet un calcul infini.

— Définition du système de réécriture
On écrit $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \sharp, I, F, \delta)$, où COMPLETER. On suppose que $\mathcal{M}$ est à ruban bi-infini. On va lui associer un système de réécriture $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$:
Soit $\Gamma' = \Gamma \cup \{\sharp\}$. On définit la signature : $\Sigma_{\mathcal{M}} = Q \cup \overrightarrow{\Gamma'} \cup \overleftarrow{\Gamma'} \cup \{\overrightarrow{l}, \overleftarrow{r}\}$, qui contient uniquement des symboles de fonctions d'arité 1. Soitx_0 un symbole de constante fixé.

Définition 3 (***Terme de configuration***)

Un terme de configuration sur $\Sigma_{\mathcal{M}}$ est un terme de la forme :

$$\overrightarrow{l}(\overrightarrow{s_{i_k}}(\ldots\overrightarrow{s_{i_1}}(q(\overleftarrow{s_{j_1}}(\ldots\overleftarrow{s_{j_h}}(\overleftarrow{r}(x_0))\ldots)..)$$

où $k, h \geqslant 0$, les $i_1, .., i_k$ et $j_1, ..., j_h \in \{0..n\}$.

Tout terme de configuration $t = \overrightarrow{l}(\overrightarrow{s_{i_k}}(\ldots\overrightarrow{s_{i_1}}(q(\overleftarrow{s_{j_1}}(\ldots\overleftarrow{s_{j_h}}(\overleftarrow{r}(x_0))\ldots)..)$ décrit une unique configuration K_t avec :
— L'état courant est q,
— La tête de lecture est sur la case contenant s_{j_1} si $h \geqslant 1$, ou $\sharp$ si $h = 0$,
— Les cases à droite de la tête de lecture contiennent (de gauche à droite) les symboles $s_{j_2} \ldots s_{j_h}$, puis une infinité de $\sharp$,
— Les cases à gauche de la tête de lecture contiennent (de droite à gauche) les symboles $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$, puis une infinité de symboles $\sharp$.

FAIRE LE DESSIN DE LA CONFIGURATION
La réciproque est fausse : une configuration peut être représentée par une infinité de termes de configuration (il suffit d'ajouter des $\overrightarrow{\sharp}$ après $\overrightarrow{l}$, ou des $\overleftarrow{\sharp}$ avant $\overleftarrow{r}$).

Définition 4

Le système de réécriture consiste en les règles suivantes :
Si $(q, s_i) \to (q', s_j, \to) \in \delta$ *: On ajoute la règle* $q(\overleftarrow{s_i}(x)) \to \overrightarrow{s_j}(q'(x))$
Si $(q, \sharp) \to (q', s_j, \to) \in \delta$ *: On ajoute la règle* $q(\overleftarrow{r}(x)) \to \overrightarrow{s_j}(q'(\overleftarrow{r}(x)))$ *(C'est le cas où on est à l'extrémité du mot sur lequel on travaille)*
Si $(q, s_i) \to (q', s_j, \leftarrow) \in \delta$ *: On ajoute la règle* $\overrightarrow{l}(q(\overleftarrow{si}(x))) \to \overrightarrow{l}(q'(\overleftarrow{\sharp}(\overleftarrow{s_j})))$*, et* $\forall s_k \in \Gamma'$ *la règle* $\overleftarrow{s_k}(q(\overleftarrow{s_i}(x))) \to q'(\overrightarrow{s_k}(\overrightarrow{s_j}(x)))$
Si $(q, \sharp) \to (q', s_j, \leftarrow) \in \delta$ *: On ajoute les règles :* $\overrightarrow{l}(q(\overrightarrow{r}(x))) \to \overleftarrow{l}(q'(\overleftarrow{\sharp}(\overleftarrow{s_j}\overleftarrow{r}((x)))))$ *et* $\forall s_k \in \Gamma'$ *la règle* $\overleftarrow{s_k}(q(\overleftarrow{r}(x))) \to q'(\overrightarrow{s_k}(\overrightarrow{s_j}(\overrightarrow{r}(x))))$

Rq : Comme δ et Γ sont finis, le système de réécriture est fini.

— Lemme 5.1.4

Lemme 2

Pour t *et* t' *termes de configuration :* $t \to_{\mathcal{R}_\mathcal{M}}$ *implique* $K_t \vdash_\mathcal{M} K'_t$

Pour toutes configurations K, K'*, et tout terme de configuration* t *tel que* $K = K_t$ *:* $K \vdash_\mathcal{M} K'$ *im qu'il existe un terme de configuration* t' *tel que* $K' = K_{t'}$ *et* $t \to_{\mathcal{R}_\mathcal{M}} t'$

Ce lemme est vérifié par construction du système de réécriture $\mathcal{R}_\mathcal{M}$

— Si $\mathcal{M}$ ne s'arrête pas sur toute entrée, alors $\mathcal{R}_\mathcal{M}$ n'est pas terminant.
D'après le lemme : si $\mathcal{M}$ admet un calcul infini, alors on a une suite infinie de réécritures dans $\mathcal{R}_{\mathcal{R}=\mathcal{M}}$

— Si $\mathcal{R}_\mathcal{M}$ n'est pas terminant, alors $\mathcal{M}$ ne s'arrête pas sur toute entrée Cette implication n'est pas immédiate parce qu'une suite infinie de réécritures ne fait pas forcément intervenir seulement des termes de configuration.
Supposons que $\mathcal{R}_\mathcal{M}$ comporte une suite infinie $t_1 \to t_2 \to ....$
Comme t_1 est un terme de $\Sigma_\mathcal{M}$, on peut l'écrire sous la forme $t_1 = w(x)$ où w est un mot sur l'alphabet $\Sigma_\mathcal{M}$. Ce mot w peut être décomposé de manière unique en : $u_1 v_1 ... u_n v_n u_{n+1}$, où les u_i ne contiennent pas de symboles de Q ; et les v_i sont des mots de $\overrightarrow{\Gamma'}^* Q \overleftarrow{\Gamma'}^*$, de taille maximale. (On les obtient en considérant les éléments de Q apparaissant dans w, et en allant vers la gauche tant qu'il y a des symboles de $\overrightarrow{\Gamma'}$, et vers la droite tant qu'il y a des symboles de $\overleftarrow{\Gamma'}$).
Puisque toutes les règles de $\mathcal{R}_\mathcal{M}$ contiennent exactement un symbole de q, on a : $t_1 \to t_2$ ssi il existe $1 \leqslant j \leqslant n$, tel que : $\overrightarrow{l} v_j \overleftarrow{r}(x) \to_{\mathcal{R}_\mathcal{M}} \overrightarrow{l} v'_j \overleftarrow{r}(x)$ et le mot associé à t_2 se décompose en $u_1 v_1 ... v'_j u_{j+1} ... v_n u_{n+1}$.
Comme n est fini, et constant sur tous les t_i, et que la suite des t_i est infinie, d'après le principe des tiroirs, il existe $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que $\overrightarrow{l} v_k \overleftarrow{r}(x)$ commence une suite de réécriture infinie. Or, ce terme est en terme de configuration ; donc il correspond à une configuration de $\mathcal{M}$ débutant un calcul infini.

— Conclusion Finalement, on a réduit le problème de l'arrêt uniforme au problème de la terminaison. Comme le problème de l'arrêt uniforme est indécidable, la terminaison est indécidable. ■

Références

[1] Franz Baader, *Term Rewriting and All That.* 1999.