Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Référence(s) :
– H. Queffélec et C. Zuily - *Analyse pour l'agrégation*

Théorème 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue ; soit ω son module de continuité (i.e. $\omega : h \in [0,1] \mapsto \sup\{|f(u) - f(v)| : |u - v| \leqslant h\}$).
Pour $n \geqslant 1$, on définit le n-ème polynôme de Bernstein de f :

$$B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Alors :

1. *La suite $(B_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et on a même :*

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - B_n\|_\infty \leqslant C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

2. *Il existe une fonction f lipschitzienne telle que $\|f - B_n\|_\infty \geqslant \delta\omega\left(\frac{1}{n}\right)$*

Étape 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables iid suivant la loi de Bernoulli $b(x)$, avec $x \in [0,1]$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{k} X_k$.

Alors, S_n suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n,x)$ et

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x)$$

Intuitivement, par la loi des grands nombres, $B_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$.

Étape 2

Soit $h \in [0,1]$, Soit $\lambda \in [0,1]$ tel que $\lambda h \in [0,1]$. Alors : $\omega(\lambda h) = (\lambda+1)\omega(h)$

Montrons que ω est sous additive :

Soient $\delta, \varepsilon > 0$. Soit $F : \left| \begin{array}{ccc} A_{\delta+\varepsilon} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |f(x) - f(y)| \end{array} \right.$, où $A_{\delta+\varepsilon} = \{(x,y) \in [0,1], |x+y| \leqslant \delta + \varepsilon\}$.
La fonction F est continue sur le compact $A_{\delta+\varepsilon}$ donc

$$\exists (x_0, y_0) \in A_{\delta+\varepsilon}, \omega(\delta+\varepsilon) = |f(x_0) - f(y_0)|$$

Soit $z \in [0,1]$ tel que $|x_0 - z| \leqslant \delta$ et $|y_0 - z| \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$\omega(\delta+\varepsilon) \leqslant |f(x_0) - f(z)| + |f(y_0) - f(z)| \leqslant \omega(\delta) + \omega(\varepsilon)$$

Ainsi, par une récurrence immédiate, on obtient : $\forall N \in \mathbb{N}$ tel que $Nh \leqslant 1, \omega(Nh) \leqslant N\omega(h)$. Donc

$$\omega(\lambda h) \leqslant \omega\left(\left(\lfloor\lambda\rfloor + 1\right)h\right) \leqslant \left(\lfloor\lambda\rfloor + 1\right)\omega(h) \leqslant (\lambda+1)\omega(h)$$

Étape 3

Montrons (1.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité précédente : $\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right) \leqslant \left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(x)| &\leqslant \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right]\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_1+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&\underset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left(x-\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \operatorname{Var}\left(x-\frac{S_n}{n}\right) - \underbrace{\mathbb{E}\left[x-\frac{S_n}{n}\right]^2}_{=0 \text{ parce que } \mathbb{E}[S_n]=nx} \\
&= \frac{\operatorname{Var}(S_n)}{n^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|f(x)-B_n(x)| \leqslant \left(\sqrt{x(1-x)}+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Ainsi, on a le résultat.

Étape 4

Montrons (2.)

Soit $f : x \mapsto \left|x-\frac{1}{2}\right|$. Alors,

$$\omega(h) = \sup\left\{\left|\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|y-\frac{1}{2}\right|\right|, |x-y| \leqslant h\right\} \leqslant \sup\left\{|x-y|, |x-y| \leqslant h\right\} = h$$

On prend ici des variables aléatoires $(X_n)_n$ iid de loi $b\left(\frac{1}{2}\right)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\|f-B_n\|_\infty &\geqslant \left|f\left(\frac{1}{2}\right)-B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = B_n\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\right] = \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left[|2S_n-n|\right] \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left[|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n|\right]
\end{aligned}$$

où les $\varepsilon_j = 2X_j - 1$ sont iid et valent 1 ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ (variables aléatoires de Radmacher). On pose $Y = \prod_{j=1}^n\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)$; presque sûrement, on a :

$$|Y| = \prod_{j=1}^n\sqrt{1+\frac{\varepsilon_j^2}{n}} = \prod_{j=1}^n\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{j=1}^n e^{\frac{n}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\frac{1}{n}\right) = \sqrt{e}$$

Et, pour tout $j \in [|1,n|]$, par indépendance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon_j Y) &= \mathbb{E}\left(\varepsilon_j\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\right) \\
&= \left(\mathbb{E}[\varepsilon_j]+\frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_j^2]\right)\prod_{k\neq j}\mathbb{E}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right) = \frac{i}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n\varepsilon_j Y\right]\right| = \left|\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(\varepsilon_j Y)\right| = \left|\sum_{j=1}^n\frac{i}{\sqrt{n}}\right| = \sqrt{n}$$

Or,

$$\left| \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j Y\right] \right| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\right| |Y|\right] \leqslant \sqrt{e}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\right|\right]$$

Donc $\mathbb{E}[|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n|] \geqslant \sqrt{\frac{n}{e}}$ et finalement :

$$\|f - B_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{n}{e}} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{e}} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Complément

En fait, on a redémontré dans un cas particulier l'inégalité de Khintchine :

Théorème 2

Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires iid de Radmacher ($= \pm 1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$). Soit f une combinaison linéaire des ε_i, alors :

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \sqrt{e}\, \|f\|_1$$