# Colle semaine 10 MP

Pierre Le Scornet

5 décembre 2020

## Exercice 1 - *

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On peut y définir trois normes : $\| \sum_{i=0}^{p} p_i X^i \|_1 = \sum_{i=0}^{p} |p_i|$, $\| \sum_{i=0}^{p} p_i X^i \|_2 = \left( \sum_{i=0}^{p} p_i^2 \right)^{1/2}$, $\| \sum_{i=0}^{p} p_i X^i \|_\infty = \max_{i=0}^{p} |p_i|$. Montrer qu'elles le sont. Sont-elles équivalentes deux-à-deux ?

## Exercice 2 - *

Soit $(E, \|\|)$ un evn.
1) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\|x\| + \|y\| \leq \|x - y\| + \|x + y\|$. En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x - y\|, \|x + y\|)$. Est-ce que la constante 2 est optimale ?
2) Supposons que la norme soit euclidienne. Montrer que $(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$, pour tous $x, y \in E$. En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x - y\|, \|x + y\|)$. Est-ce que $\sqrt{2}$ est une constante optimale ?

## Exercice 3 - **

Soit $E$ un evn. On définit pour $A \subset E$ son adhérence $\overline{A}$ comme l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans $A$ (pour la norme de $E$). On admettra que si une suite converge, sa norme converge vers la norme de sa limite.
1) Montrer que la boule $\mathcal{B}(c, r)$ ouverte de centre $c$ et de rayon $r$ est égale à $c + \mathcal{B}(0, r)$. (on admettra que le résultat est le même en boule fermée)
2) Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon.

## Exercice 4 - **

On va montrer deux inégalités classiques dans les espaces euclidiens (ici $\mathbb{R}^n, n \geq 1$). Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1) Par un argument de concavité, montrer que $xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$.
2) a)Supposons que $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^p = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 1$.

b) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

c) On suppose que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

d) On définit la norme $p$ sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. Démontrer que c'est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

## Exercice 5 - **

Soient $E$ et $F$ deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de $E$ et vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que $f$ est linéaire et continue pour cette norme.

## Exercice 6 - **

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ une isométrie, i.e. une application qui conserve la distance : $\forall x, y \in E, \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$. On considère $u : x \in E \to f(x) - f(0)$.
1) Montrer que $u$ conserve le produit scalaire.
2) Montrer que l'application $u$ est linéaire.
3) Conclure.

## Solution 1

On peut remarquer que ces normes ressemblent à des normes de $\mathbb{R}^p$ sur $\|(p_i)_{1\leq i\leq p}\|_{1/2/\infty}$, et la démonstration est presque la même (juste en faisant attention aux degrés des sommes de polynômes). Pour montrer qu'elles ne sont pas équivalentes deux à deux, il va falloir trouver une suite de polynôme telle que leurs normes sont asymptotiquement différentes. Il faut que les degrés de cette suite diverge, sinon on reste dans un espace de dimension finie où les normes sont donc toutes équivalentes. On va prendre $\sum_{k=0} nX^k$, dont la norme 1 est $n$, sa norme 2 $\sqrt{n}$, et sa norme $\infty$ 1. Puisqu'elles sont asymptotiquement différentes, les normes ne peuvent pas être équivalentes.

## Solution 2

1) On écrit $x = \frac{1}{2}((x+y)+(x-y))$ et $y = \frac{1}{2}((x+y)+(y-x))$. Par l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme, on a $\|x\|, \|y\| \leq \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|x-y\|$ donc $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$. Ensuite, chaque terme du côté droit de l'inégalité est plus petit que le max, donc leur somme est plus petite que deux fois le max. Elle est optimale puisque elle est atteinte en $x = (1,0), y = (0,1)$ pour la norme $\infty$.

2) On a $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle$ et $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$. Ainsi, leur somme est $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ (par Cauchy-Schwarz). Par la même méthode qu'en 1), on a $(\|x\|+\|y\|)^2 \leq 2\max(\|x-y\|^2, \|x+y\|^2)$, et en passant l'inégalité à la racine on obtient le résultat voulu. La constante est optimale, elle est atteinte pour les mêmes $x, y$ qu'en 1 avec le produit scalaire usuel.

# Solution 3

1) Par une simple suite d'équivalence, en utilisant la définition des boules.
2) On note $B = \mathcal{B}(c,r)$, $B' = \overline{\mathcal{B}}(c,r)$. D'une part, on a $B \subseteq \overline{B}$ (en prenant des suites constantes), et plus généralement $B' \subseteq \overline{B}$ : soit $x \in B'$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n-1}{n}(x-c) \in \mathcal{B}(0,r)$ et tend vers $x-c$, donc $x$ est la limite de la suite $\frac{n-1}{n}(x-c)+c$ d'éléments de $B$ et donc $B' \subseteq \overline{B}$. D'autre part, soit $x \in \overline{B}$, et $x_n$ une suite de $B$ convergeant vers $x$. Par continuité de la norme (ce que j'ai admis), puisque $\|x_n - c\| < r$, en passant à la limite sur $n$ on a $\|x-c\| \leq r$, donc $x \in B'$.

# Solution 4

1) On va utiliser la concavité du log. $\log(x) + \log(y) = \frac{1}{p}\log(x^p) + \frac{1}{q}\log(y^q) \leq \log(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q)$, ce qui nous donne l'inégalité demandée.
2) a) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à chaque produit $a_i b_i$ :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p}a_i^p + \frac{1}{q}y^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

b) On applique le a) aux familles

$$\overline{a} = \frac{a}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \overline{b} = \frac{b}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Ainsi, on a $\sum_{i=1}^n \overline{a}_i\overline{b}_i \leq 1$, ce qui en multipliant par les deux dénominateurs donne le résultat demandé.
c) On décompose $(a_i+b_i)^p = (a_i+b_i)^{p-1}a_i + (a_i+b_i)^{p-1}b_i$. On applique à chaque terme l'inégalité de Hölder, et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

On multiplie de chaque côté par $(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p)^{\frac{1}{p}-1}$, et on obtient le résultat voulu.
d) On a montré l'inégalité triangulaire, et les autres propriétés de la norme viennent naturellement.

## Solution 5

Soit $x \in E$. Par une récurrence immédiate, on a $f(nx) = nf(x)$, et on a immédiatement $f(-x) = f(x)$. Enfin, pour $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$, puisque $qf(\frac{p}{q}x) = f(q\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$, donc $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$. Ainsi, on a montré l'homogénéité sur $\mathbb{Q}$. Or, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe une suite de rationnels $\lambda_n \to \lambda$ et on a $f(\lambda x) = f(\lambda_n x + (\lambda - \lambda_n)x) = \lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x)$. On va montrer que le deuxième terme tend vers 0 : pour cela on va devoir repasser dans $\mathbb{Q}$ : on va utiliser le fait que la fonction est bornée sur la boule unité. Soit $c_n$ une suite de rationnels tels que $\|(\lambda - \lambda_n)x\| < c_n$, et qui tends vers 0. Alors, on a $f((\lambda - \lambda_n)x) = c_n f(\frac{\lambda - \lambda_n}{c_n}x)$. Or $\|\frac{\lambda - \lambda_n}{c_n}x\| < 1$, donc $\|f((\lambda - \lambda_n)x)\| \leq c_n M \to 0$. Ainsi, $f((\lambda - \lambda_n)x) \to 0$, et ainsi $f(\lambda x) = \lim \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$. C'est la seule propriété qu'il nous manquait pour avoir la linéarité. Pour la continuité, c'est plus une question de 5/2 puisque vous n'avez pas vu de propriétés sur la continuité des applications linéaires : $f$ linéaire est continue ssi $f$ est bornée sur la boule unité ssi $f$ est bornée sur la sphère unité ssi $f$ est continue en 0. Ça se montre assez bien en montrant $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ (par exemple).

## Solution 6

1) On a :

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|f(x) + f(y) - f(0) - f(0)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|f(x + y) - f(0 + 0)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) = \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

2) On a pour tous $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Alors par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}
\|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 = \quad & \|u(x + \lambda y)\|^2 + \|u(x)\|^2 + \lambda^2 \|u(y)\|^2 - 2\langle u(x + \lambda y), u(x) \rangle \\
& -2\lambda \langle u(x + \lambda y), u(y) \rangle + 2\lambda \langle u(y), u(x) \rangle \\
= \quad & \|x + \lambda y\| + \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 - 2\langle x + \lambda y, x \rangle \\
& -2\lambda \langle x + \lambda y, y \rangle + 2\lambda \langle y, x \rangle \\
= \quad & \|x + \lambda y - x - \lambda y\|^2 \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

Et donc $u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$. De plus, $\|u(0)\| = \|0\|$ donc $u(0) = 0$. Ainsi, $u$ est linéaire.
3) La conclusion, c'est que $f = u + f(0)$ est donc affine. Le fait de conserver le produit scalaire est la définition d'un endomorphisme orthogonal.