

Colle semaine 10 MP*

Pierre Le Scornet

11 décembre 2020

Cours 1 - *

Définir la matrice jacobienne, et expliquer comment calculer ses coefficients.

Cours 2 - *

Énoncer et démontrer la formule de la chaîne pour la différentielle, puis les dérivées partielles d'une composée.

Cours 3 - *

Que peut-on dire sur les points critiques d'une fonction différentiable? Le montrer.

Exercice 1 - **

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t > 0, f(tx, ty) = t^r f(x, y)$.

1) Montrer que si f est homogène de degré r , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.

2) Montrer que f est homogène de degré r ssi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = r f(x, y)$$

3) Supposons que f est \mathcal{C}^2 . Montrer pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r(r - 1) f(x, y)$$

Exercice 2 - **

On dit que deux espaces sont homéomorphes s'il existe une bijection bicontinue (continue d'inverse continue) entre elles.

1) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arc.

2) Montrer que \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.

3) Montrer que $[0; 1]$ et S^1 le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.

Exercice 3 - **

Soient E, F des evn, $A \subseteq E$, $f : A \rightarrow F$ continue. On suppose f localement constante, i.e. que pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(a, r) \cap A$. On va montrer que A cpa et f localement constante implique que f est constante.

Soit $a, b \in A$, ϕ un chemin continu de a à b . Montrer que $H = \{s \in [0; 1], f(\phi(s)) = f(a)\}$ est tel que $\sup H = 1$. Conclure.

Exercice bonus

Soit $G = \{(x, \sin \frac{1}{x}), x \in \mathbb{R}_+^*\}$. Montrer que G est connexe par arc, mais que \overline{G} l'ensemble des valeurs d'adhérences de G n'est pas connexe par arc.

Exercice d'application commun

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs dérivées partielles :

$$h_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(e^x + g(x, y)) \quad (1)$$

$$h_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(xy^2g(x, y)) \quad (2)$$

$$h_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x^2 - y^2 + \cos(z)^2) \quad (3)$$

Solution 1 - *

1) Posons $g : (x, y) \mapsto f(tx, ty)$. Alors on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)$. Or on a aussi que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = t^r \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ puisque f est homogène de degré d (et t ne dépend pas de x, y). Ainsi, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

2) \Rightarrow : on dérive la relation d'homogénéité selon t : $x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = rt^{r-1} f(x, y)$.

\Leftarrow : soit $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$. Puisque φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , on peut la dériver :

$$\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \frac{r}{t} \varphi(t)$$

ce qui nous donne une équation différentielle ordinaire dont la solution est $\varphi(t) = \lambda t^r$, avec $\lambda = \varphi(1) = f(x, y)$, d'où $\varphi(t) = f(tx, ty) = f(x, y)t^r$.

3) On écrit la relation du 2) vérifiée par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (homogènes de degré $r - 1$), on obtient :

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (r - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = (r - 1) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

ce qui, en ajoutant x fois la première et y fois la deuxième nous donne :

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) &= (r - 1) \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= (r - 1) r f(x, y) \end{aligned}$$

Solution 2

1) Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$. Si $0 \notin [x; y]$, alors $f : t \in [0; 1] \mapsto (1-t)x + ty$ est une fonction continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sinon, x, y sont colinéaires : alors soit z non colinéaire à x dans \mathbb{R}^2 : alors $0 \notin [x, z], 0 \notin [y, z]$, et en concaténant ces deux segments on obtient un chemin de x à y .

2) Supposons qu'ils le soient par $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: soit $a = f(0, 0)$. Alors $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)}$ est aussi un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Or le premier est connexe par arc et pas le deuxième, ce qui est absurde.

3) Supposons qu'ils le soient. On remarque que le cercle privé d'un point reste cpa, retirons donc le point $(x, y) = f(\frac{1}{2})$: on a encore un homéomorphisme de $[0; 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ vers $S^1 \setminus \{(x, y)\}$ ce qui est absurde.

Solution 3

H est non vide et majoré, donc la borne supérieure existe bien, et on la notera t . De plus, pour h_n une suite de H convergeant vers t , on a par continuité de f $f(t) = \lim_n f(h_n) = f(a)$, donc $t \in H$. Supposons que $t < 1$. Puisque f est localement constante, il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(\phi(t), r) \cap A$. Par continuité de ϕ , il existe $\varepsilon < 1 - t$ et $\phi(\varepsilon) \in B(\phi(t), r)$, donc $\varepsilon \in H$, ce qui est impossible. Ainsi, on a $t = 1$ et donc $f(b) = f(a)$, donc f est constante.

Solution bonus

N'importe quel graphe d'une fonction continue est connexe par arc, en prenant comme chemin de a à b $t \in [0; 1] \mapsto ((1-t)a + tb, f((1-t)a + tb))$. On peut déterminer que $\overline{G} = G \cup \{0\} \times [-1; 1]$. On suppose qu'il existe un chemin ϕ de $(0, 0)$ à $(\frac{1}{2\pi}, 0)$. On regarde l'instant t_0 le sup des t tels que $\phi(t) \in \{0\} \times [-1; 1]$. Alors si l'on regarde la deuxième coordonnée de ϕ en t_0 , elle est continue en t_0 donc il existe $\eta > 0$ tel que $|t - t_0| < \eta \Rightarrow |\phi_2(t) - \phi_2(t_0)| \leq \frac{1}{2}$ et tous les points de la forme $(t_1, \sin \frac{1}{t_1})$ pour $t_1 \in]t_0; t_0 + \eta[$ sont dans A . Or pour $x \in]\phi_1(t_0) = 0; \phi_1(t_0 + \eta)[$, $\phi_2(x)$ passe une infinité de fois par 1 ou -1, ce qui contredit $|\phi_2(t) - \phi_2(t_0)| < \frac{1}{2}$ (tout élément de $[-1; 1]$ est à distance d'au moins $\frac{1}{2}$ de -1 ou 1).

Remarques

À l'oral, j'avais oublié de vous demander de montrer que les applications sont bien différentiables. Quand on dérive une fonction (partiellement ou pas), on doit avoir au préalable dit et justifié qu'elle est dérivable / différentiable. On a très peu souvent besoin de montrer ça par la définition.