Colle semaine 11 MP*

Pierre Le Scornet

18 décembre 2020

Cours 1

Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

Cours 2

Définir la notion d'évènement négligeable. Que peut-on dire de l'union au plus dénombrable d'évènements négligeables ? (le montrer)

Cours 3

Définir pour $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète $\mathbb{P}_X$. Montrer que c'est une loi de probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$.

Exercice 1 - *

Supposons que $X \sim B(n,p)$ la loi binomiale, et soit $\epsilon > 0$.
1) Montrer que $\mathbb{P}(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$.
2) Application : avec un dé cubique non biaisé, combien de lancers doit-on effectuer pour être sûr avec une probabilité d'erreur de 1% d'obtenir une fréquence d'apparition de la face 6 différente d'au plus 0.001 de $\frac{1}{6}$?

Exercice 2 - *

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini.
1) Montrer que $E[X]^2 \leq E[X^2]$.
2) Soit f une fonction convexe, i.e. telle que pour $n \in \mathbb{N}$ $(\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^n, (x_i) \in \mathbb{R}^n$, on a $f(\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$. Montrer l'inégalité de Jensen :

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

Exercice 3 - *

Soit (X, Y) suivant une loi uniforme sur $[\![0; n]\!]^2$.
1) Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi de $X + Y$.
2) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 - **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $(p_1, \dots p_k)$ ses facteurs premiers On tire un $x \in [\![1; n]\!]$ selon une loi uniforme. Pour $m \in [\![1; n]\!]$, on note A_m l'évènement $m|x$, et on note B l'évènement x et n premiers entre eux.
1) Exprimer B en fonction des A_{p_j}.
2) Pour $m|n$, calculer la probabilité de A_m.
3) Montrer que $A_{p_1} \dots A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.
4) En déduire la probabilité de B.
5) En déduire que pour $\phi(n)$ le nombre d'entiers $1 \leq m \leq n$ premiers avec n, on a $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i})$.

Exercice 5 - *

On se place devant une urne avec N boules numérotées de 1 à N. On en tire n avec remises, et on note X, Y les plus petit et plus grand nombres obtenus. Déterminer la loi de X et Y.

Exercice 6 - **

Un avion comporte $n \geq 2$ sièges, et n passagers vont s'y installer à leur place attitrée. Le premier passager s'installe à une place au hasard, et les suivants s'installent à leur place sauf si elle est prise, à une place libre de façon uniforme sinon. Déterminer la probabilité que le dernier passager s'installe à sa place.

Solution 1

1) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (qui est vraie dans le cas fini). L'espérance de $\frac{X}{n}$ est p, et sa variance est $\frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$. Ainsi, on a l'inégalité demandée.
2) X la vad égale au nombre de 6 sur n lancers suit une loi binomiale de paramètres $n, p = \frac{1}{6}$. Ainsi, on a $P(|\frac{X}{n} - p| \leq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$, et pour que ce terme soit inférieur à 0.01 il faut que $\frac{5}{36 \times 0.001 \times n} \leq 0.01$, i.e. $n \geq \frac{5}{36 \times 0.001 \times 0.01}$

Solution 2

1) $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i \sqrt{p_i}\sqrt{p_i}$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur cette somme, et on obtient $|E[X]| \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n p_i)^{\frac{1}{2}} = E[X^2]^{\frac{1}{2}}$.
2) Il suffit juste de l'écrire : $f(E[X]) = f(\sum_{i=1}^n p_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) = E[f(X)]$ par convexité de f.

Solution 3

1) $P(X = k) = \sum_{l=0}^n P(X = k, Y = l)$ ($\{Y = l\}_l$ est un système complet d'évènements), donc $P(X = k) = (n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$. C'est la même chose pour Y. Pour $X + Y$, puisque X et Y sont positifs on a : $P(X + Y = k) = P(\sqcup_{l \in [\![0;k]\!]} \{X = l, Y = k - l\}) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{k+1}{(n+1)^2}$.
2) $P(X = k, Y = l) = \frac{1}{(n+1)^2} = P(X = k)P(Y = l)$, donc elles sont indépendantes.

Solution 4

1) n est premier avec x ssi tous les facteurs premiers de n sont premiers avec x, i.e. ne divisent pas x. Ainsi, $B = \overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}$
2) Soit $m|n, n = km$. Alors les nombres divisibles par m inférieurs ou égaux à n sont $m, 2m, \ldots km$. Ainsi A_m est de cardinal k et $P(A_k) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}$.
3) Puisque les p_i sont premiers entre eux deux à deux, alors tous les p_i divisent x ssi leur produit divise x, i.e. $A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \ldots p_k}$. En passant à P, on obtient à droite $\frac{1}{p_1 \ldots p_k}$, i.e. $\prod_{i=1}^k P(A_{p_i})$.
4) Si des évènements sont mutuellement indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi. Ainsi, $P(B) = P(\overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}) = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.
5) $P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$, d'où le résultat demandé.

Solution 5

Ici, la difficulté est de calculer directement $P(X = k)$. Pour contourner la difficulté, il faut calculer $P(X \geq k)$. En effet, $X \geq k$ ssi toutes les boules ont un numéro plus grand que k. Puisqu'on fait un tirage avec remise, on a $P(X \geq k) = \prod_{i=1}^n \frac{N-k+1}{N} = \frac{(N-k+1)^n}{N^n}$. On conclut en remarquant que $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$
De même pour Y, en calculant $P(Y \leq k) = \frac{k^n}{N^n}$, puis en faisant la même remarque.

Solution 6

Soit p_n la probabilité cherchée G l'évènement associé, A_k l'évènement "le premier passager s'installe à la $k$ième place. On va déterminer p_n par récurrence. Sans perte de généralité, on va attribuer la place k au passager numéro k. Pour $n = 2$, $p_1 = \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 2$, par la formule des probabilités totales, $p_n = P(G) = \sum_{i=0}^{n} P(A_k)P(G|A_k)$.

— On a $P(G|A_1) = 1$ (le premier passager prend la bonne place, donc tous les autres aussi).

— $P(G|A_n) = 0$ (de toute façon, la place n sera prise).

— Si le premier passager s'installe en $2 \leq k \leq n-1$, alors les passagers $2 \ldots k-1$ s'installent à leur place. Ensuite, il reste $n-k+1$ passagers, le siège 1 et les sièges $k+1 \ldots n$. Ainsi, le passager k va choisir au hasard une place : en renommant la place 1 comme la place k, on se retrouve dans la situation initiale avec $n' = n-k+1$. Ainsi, $P(G|A_k) = p_{n-k+1}$.

Ainsi, $p_n = \sum_{i=2}^{n-1} P_{A_k} p_{n-k+1} + P_{A_1} + 0 = \frac{n-2}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ par récurrence forte.