Exercice 1 - *

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et un évènement A de probabilité non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$

Exercice 2 - *

Pour X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson, quel est l'entier k maximisant la probabilité de $X = k$?

Exercice 3 - *

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0;1[$. Soit la variable aléatoire $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{P}(A \text{ diagonalisable})$.

Exercice 4 - **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $(p_1, \dots p_k)$ ses facteurs premiers On tire un $x \in [\![1;n]\!]$ selon une loi uniforme. Pour $m \in [\![1;n]\!]$, on note A_m l'évènement $m|x$, et on note B l'évènement x et n premiers entre eux.

1) Exprimer B en fonction des A_{p_j}.
2) Pour $m|n$, calculer la probabilité de A_m.
3) Montrer que $A_{p_1} \dots A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.
4) En déduire la probabilité de B.
5) En déduire que pour $\phi(n)$ le nombre d'entiers $1 \leq m \leq n$ premiers avec n, on a $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{p_i})$.

Exercice 5 - **

On se place devant une urne avec N boules numérotées de 1 à N. On en tire n avec remises, et on note X, Y les plus petit et plus grand nombres obtenus. Déterminer la loi de X et Y.

Exercice 6 - **

Un avion comporte $n \geq 2$ sièges, et n passagers vont s'y installer à leur place attitrée. Le premier passager s'installe à une place au hasard, et les suivants s'installent à leur place sauf si elle est prise, à une place libre de façon uniforme sinon. Déterminer la probabilité que le dernier passager s'installe à sa place.

Exercice bonus

On joue à un jeu : je lance une pièce, et si c'est pile je gagne. Supposons que je gagne : quelle est la probabilité que je sois un tricheur ?

Solution 1

Raisonnons par analyse synthèse : supposons que $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$. Alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_A(A) = 1$ donc A est presque sûr. Inversement, supposons que A est presque sûr. Alors, pour tout évènement A', on a :

$$\mathbb{P}_A(A') = \frac{\mathbb{P}(A \cap A')}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A \cap A')$$

Or A^C le complémentaire de A est un évènement négligeable, donc $A^C \cap A'$ l'est aussi (par croissance de la probabilité, que l'on montre avec l'additivité des mesures de probabilités). Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap A') = \mathbb{P}(A') - \mathbb{P}(A^C \cap A') = \mathbb{P}(A')$ par additivité de la probabilité, ce qui nous donne le résultat.

Solution 2

On va calculer la quantité $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}$, et regarder quand elle est supérieure, égale, ou inférieure à 1.

$$\frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{\lambda}{k+1}$$

Donc $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} \bowtie 1 \Rightarrow k \bowtie k-1$, avec $\bowtie \in \{\leq, =, \geq\}$. On en déduit que si $\lambda < 1$, le maximum est en 0, si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors il y a deux maximums en $\lambda - 1$ et λ et sinon, le maximum est en $\lfloor \lambda \rfloor$.

Solution 3

A est diagonalisable ssi $X \neq Y$: il faut donc calculer sa probabilité, en passant au complémentaire :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k)$$

Par indépendance, d'où $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty}(p(1-p)^{k-1})^2 = p^2\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \text{diagonalisable}) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2-2p}{2-p}$.

Solution 4

1) n est premier avec x ssi tous les facteurs premiers de n sont premiers avec x, i.e. ne divisent pas x. Ainsi, $B = \overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}$
2) Soit $m|n, n = km$. Alors les nombres divisibles par m inférieurs ou égaux à n sont $m, 2m, \ldots km$. Ainsi A_m est de cardinal k et $P(A_k) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}$.
3) Puisque les p_i sont premiers entre eux deux à deux, alors tous les p_i divisent x ssi leur produit divise x, i.e. $A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \ldots p_k}$. En passant à P, on obtient à droite $\frac{1}{p_1 \ldots p_k}$, i.e. $\prod_{i=1}^{k} P(A_{p_i})$.
4) Si des évènements sont mutuellement indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi. Ainsi, $P(B) = P(\overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}) = \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.
5) $P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$, d'où le résultat demandé.

Solution 5

Ici, la difficulté est de calculer directement $P(X = k)$. Pour contourner la difficulté, il faut calculer $P(X \geq k)$. En effet, $X \geq k$ ssi toutes les boules ont un numéro plus grand que k. Puisqu'on fait un tirage avec remise, on a $P(X \geq k) =$

$\prod_{i=1}^{n} \frac{N-k+1}{N} = \frac{(N-k+1)^n}{N^n}$. On conclut en remarquant que $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$
De même pour Y, en calculant $P(Y \leq k) = \frac{k^n}{N^n}$, puis en faisant la même remarque.

Solution 6

Soit p_n la probabilité cherchée G l'évènement associé, A_k l'évènement "le premier passager s'installe à la $k$ième place. On va déterminer p_n par récurrence. Sans perte de généralité, on va attribuer la place k au passager numéro k. Pour $n = 2$, $p_1 = \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 2$, par la formule des probabilités totales, $p_n = P(G) = \sum_{i=0}^{n} P(A_k)P(G|A_k)$.

- On a $P(G|A_1) = 1$ (le premier passager prend la bonne place, donc tous les autres aussi).
- $P(G|A_n) = 0$ (de toute façon, la place n sera prise).
- Si le premier passager s'installe en $2 \leq k \leq n-1$, alors les passagers $2 \ldots k-1$ s'installent à leur place. Ensuite, il reste $n-k+1$ passagers, le siège 1 et les sièges $k+1 \ldots n$. Ainsi, le passager k va choisir au hasard une place : en renommant la place 1 comme la place k, on se retrouve dans la situation initiale avec $n' = n-k+1$. Ainsi, $P(G|A_k) = p_{n-k+1}$.

Ainsi, $p_n = \sum_{i=2}^{n-1} P_{A_k} p_{n-k+1} + P_{A_1} + 0 = \frac{n-2}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ par récurrence forte.