Colle semaine 15 MP

Pierre Le Scornet

22 janvier 2021

Exercice 1 - *

1) Donner des exemples de variables aléatoires discrètes :
   1. ayant une espérance infinie,
   2. n'ayant pas d'espérance.
2) Montrer qu'une variable aléatoire discrète bornée est d'espérance finie.

Exercice 2 - *

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tel qu'il existe $0 < p < 1$ tel que pour tous n, $\mathbb{P}(X = n) = p\mathbb{P}(X \geq n)$. Déterminer la loi de X.

Exercice 3 - *

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et b vérifient que pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit bient défini et que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une loi de probabilité d'une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$.
2) Déterminer sa fonction génératrice.

Exercice 4 - **

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. avec $X_0 \sim \mathcal{B}(p)$, $p \in]0;1[$. On note L_1 l'entier naturel tel que $X_1 = \cdots = X_{L_1} \neq X_{L_1+1}$, et L_2 l'entier naturel tel que $X_{L_1+1} = \cdots = X_{L_2+L_1} \neq X_{L_2+L_1+1}$.
1) Déterminer la loi conjointe de (L_1, L_2).
2) Déterminer les marginales et les espérances de L_1 et L_2.
3) Déterminer la covariance de L_1 et L_2.

Exercice 5 - *

Soit X, Y deux v.a. indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ, μ. Démontrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 6 - **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $(p_1, \dots p_k)$ ses facteurs premiers On tire un $x \in [\![1; n]\!]$ selon une loi uniforme. Pour $m \in [\![1; n]\!]$, on note A_m l'évènement $m|x$, et on note B l'évènement x et n premiers entre eux.
1) Exprimer B en fonction des A_{p_j}.
2) Pour $m|n$, calculer la probabilité de A_m.
3) Montrer que $A_{p_1} \dots A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.
4) En déduire la probabilité de B.
5) En déduire que pour $\phi(n)$ le nombre d'entiers $1 \leq m \leq n$ premiers avec n, on a $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{p_i})$.

Solution 1

1) On peut prendre :

1. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Ainsi, on va définir X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$, et la série des $\frac{1}{n+1}$ diverge vers $+\infty$ donc l'espérance de X est infinie.
2. On va symétriser X pour obtenir une v.a. Y sur $\mathbb{Z}^*$, de loi $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2|n|(|n|+1)}$. La famille des $\frac{n}{2|n|(|n|+1)}$ n'est pas sommable sur $\mathbb{Z}^*$, donc l'espérance n'existe pas.

2) On veut pouvoir sommer $\mathbb{P}(X = x)x$ sur l'image de X. Pour cela, on majore $|X(\omega)|$ par $M > 0$, et donc $\forall x \in X(\Omega)$, $|\mathbb{P}(X = x)x| \leq \mathbb{P}(X = x)M$ qui est sommable de somme M, donc la famille $(\mathbb{P}(X = x)x)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et l'espérance existe.

Solution 2

On va raisonner par récurrence forte, en notant $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et en remarquant pour l'initialisation que $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$, d'où $p_1 = p$, et pour $n = 2$ on trouve $p_2 = p\mathbb{P}(X \geq 2) = p(1 - p_1) = p(1 - p)$. Pour l'hérédité, montrons que $p_{k+1} = p(1 - p)^k$:

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= p \sum_{j\geq k+1} p_j \\
&= p\left(1 - \sum_{j=1}^{k} p(1-p)^{j-1}\right) \\
&= p\left(1 - p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}\right) \\
&= p(1-p)^k
\end{aligned}$$

Solution 3

1) Il faut que $p_n \in [0; 1]$ et $\sum_{n\geq 0} p_n = 1$. Pour la première condition, il faut que $a, b \geq 0$ et pour la deuxième condition il faut que

$$\frac{b}{1 - \frac{a}{a+1}} = b(a + 1) = 1$$

2) La fonction génératrice est donc :

$$G(t) = \sum_n p_n t^n = \frac{b}{1 - \frac{at}{a+1}} = \frac{1}{a + 1 - at}$$

Solution 4

1) On veut calculer $Cov(L_1, L_2) = \mathbb{E}(X, Y)$. Pour cela, il nous faut la loi conjointe de (L_1, L_2) et les espérances de L_1 et L_2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_1 = m, L_2 = n) &= \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_m \neq X_{m+1} + \cdots + X_{m+n} \neq X_{m+n+1}) \\
&= p^{m+1}(1-p)^n + (1-p)^{m+1} + p^n
\end{aligned}$$

par indépendance des X_i. On introduit $q = 1 - p$ 2) Ainsi, $\mathbb{P}(L_1 = m) = \sum_{n\geq 1} p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n = p^{m+1}\frac{q}{1-q} + q^{m+1}\frac{p}{1-p} = qp^m + pq^m$.
De même, $\mathbb{P}(L_2 = n) = \sum_{m\geq 1} p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n = q^n\frac{p^2}{1-p} + p^n\frac{q^2}{1-q} = p^2q^{n-1}q^2p^{n-1}$.
Pour leurs espérances, on calcule la somme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_1) &= \sum_{m\geq 1} m(qp^m + pq^m) \\
&= pq \sum_{m\geq 1} mp^{m-1} + mq^{m-1} \\
&= pq\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) \\
&= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}
\end{aligned}$$

et de même pour L_2, on fait le même calcul et on trouve $\mathbb{E}(L_2) = \frac{p^2}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-p)^2} = 2$.
3) Il ne nous reste qu'à calculer l'espérance de L_1L_2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_1L_2) &= \sum_{m,n\geq 1} mn(p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n) \\
&= \sum_{m\geq 1} mp^{m+1} \sum_{n\geq 1} nq^n + \sum_{m\geq 1} mq^{m+1} \sum_{n\geq 1} np^n \\
&= \frac{p^2}{(1-p)^2}\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-q)^2}\frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $Cov(L_1, L_2) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 2\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) = -\frac{(p-q)^2}{pq}$.

Solution 5

Soit $Z = X + Y$, et on va utiliser les fonctions génératrices de X, Y, Z, dont les coefficients de la série sont notés x_n, y_n, z_n. On sait que $x_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, et $y_n = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$. Par indépendance des deux variables aléatoires, on a $G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t)$. Puisqu'on a deux séries convergeant absolument, on peut utiliser le produit de Cauchy : $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
c_n &= e^{-\lambda-\mu} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k\mu^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Solution 6

1) n est premier avec x ssi tous les facteurs premiers de n sont premiers avec x, i.e. ne divisent pas x. Ainsi, $B = \overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}$

2) Soit $m|n, n = km$. Alors les nombres divisibles par m inférieurs ou égaux à n sont $m, 2m, \ldots km$. Ainsi A_m est de cardinal k et $P(A_k) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}$.
3) Puisque les p_i sont premiers entre eux deux à deux, alors tous les p_i divisent x ssi leur produit divise x, i.e. $A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \ldots p_k}$. En passant à P, on obtient à droite $\frac{1}{p_1 \ldots p_k}$, i.e. $\prod_{i=1}^{k} P(A_{p_i})$.
4) Si des évènements sont mutuellement indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi. Ainsi, $P(B) = P(\overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.
5) $P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$, d'où le résultat demandé.