Colle semaine 18 MP*

Pierre Le Scornet

18 février 2021

Cours 1

Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Cours 2

Définir le projeté orthogonal, énoncer et démontrer la caractérisation du projeté orthogonal.

Cours 3

Énoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

Exercice 1 - *

1) Donner des exemples de variables aléatoires discrètes :

1. ayant une espérance infinie,
2. n'ayant pas d'espérance.

2) Montrer qu'une variable aléatoire discrète bornée est d'espérance finie.

Exercice 2 - *

Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. discrètes L^2 sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit M leur matrice de covariance, i.e. $m_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$.
1) Montrer que M est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles (*indication : pour $\lambda \in sp(M)$, choisir z un vecteur propre associé et calculer $V(\sum_{i=1}^n z_i X_i)$*).
2) Donner une c.n.s. pour qu'elles soient toutes positives.

Exercice 3 - *

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et b vérifient que pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit bient défini et que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une loi de probabilité d'une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$.
2) Déterminer sa fonction génératrice.

Exercice 4 - **

Soit X un v.a. L^2 réelle d'espérance m et de variance σ^2, soit $\epsilon > 0$ et $Y = X - m + \epsilon$.
1) Montrer que Y est L^2 et calculer $\mathbb{E}(Y^2)$.
2) Montrer que $\mathbb{E}(Y) \leq \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{P}(Y > 0)}$. En déduire que $\mathbb{P}(X - m \leq -\epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\epsilon^2}$.
3) En déduire que $\mathbb{P}(|X - m| \geq \epsilon) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\epsilon^2}$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 5 - *

Soit X, Y deux v.a. indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ, μ. Démontrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 6 - **

1) Quelle est la loi génératrice de $U \sim \mathcal{U}(\llbracket 2; 12 \rrbracket)$?
2) Soient X_1, X_2 des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\llbracket 1; 6 \rrbracket$. Montrer que $X_1 + X_2 \not\sim \mathcal{U}(\llbracket 2; 12 \rrbracket)$.
3) Est-il possible que deux dés (pipés si besoin) à 6 faces rendent la somme de leurs deux résultats uniforme entre 2 et 12 ?

Solution 1

1) On peut prendre :

1. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Ainsi, on va définir X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$, et la série des $\frac{1}{n+1}$ diverge vers $+\infty$ donc l'espérance de X est infinie.
2. On va symétriser X pour obtenir une v.a. Y sur $\mathbb{Z}^*$, de loi $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2|n|(|n|+1)}$. La famille des $\frac{n}{2|n|(|n|+1)}$ n'est pas sommable sur $\mathbb{Z}^*$, donc l'espérance n'existe pas.

2) On veut pouvoir sommer $\mathbb{P}(X = x)x$ sur l'image de X. Pour cela, on majore $|X(\omega)|$ par $M > 0$, et donc $\forall x \in X(\Omega)$, $|\mathbb{P}(X = x)x| \leq \mathbb{P}(X = x)M$ qui est sommable de somme M, donc la famille $(\mathbb{P}(X = x)x)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et l'espérance existe.

Solution 2

On peut diagonaliser M puisqu'elle est symétrique. Soit $\lambda \in sp(M)$, et z un vecteur propre associé. On a :

$$\begin{aligned} V(\sum_{i=1}^{n} z_i X_i) &= \sum_{i=1}^{n} z_i z_j Cov(X_i, X_j) \\ &= {}^t z M z = {}^t z \lambda z = \lambda \|z\|^2 \end{aligned}$$

$V(\cdot) \geq 0$ et $\|z\| > 0$, donc $\lambda \geq 0$. Si $\lambda = 0$, alors $V(\cdot) = 0$ et donc $\sum z_i X_i = c$ p.s., $c \in \mathbb{R}$. Réciproquement, s'il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel qu'on a cette égalité p.s., alors on a

$$Cov(X_i, \sum_{j=1}^{n} z_j X_j) = \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) z_j = 0$$

et donc $0 \in sp(M)$.

Solution 3

1) Il faut que $p_n \in [0; 1]$ et $\sum_{n\geq 0} p_n = 1$. Pour la première condition, il faut que $a, b \geq 0$ et pour la deuxième condition il faut que

$$\frac{b}{1 - \frac{a}{a+1}} = b(a + 1) = 1$$

2) La fonction génératrice est donc :

$$G(t) = \sum_n p_n t^n = \frac{b}{1 - \frac{at}{a+1}} = \frac{1}{a + 1 - at}$$

Solution 4

1) Si vous avez vu que la somme de deux v.a. L^2 est L^2, c'est fini, sinon on développe Y^2 et ça devient évident.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X)(\epsilon - m) + (\epsilon - m)^2 \\ &= \sigma^2 + m^2 + 2m(\epsilon - m) + (\epsilon - m)^2 \\ &= \sigma^2 + \epsilon^2 \end{aligned}$$

2) On commence par remarquer que $Y \leq Y\mathbb{1}_{Y>0}$, qui est positive. Ainsi, on peut utiliser Cauchy-Schwarz sur ce produit et on a

$$\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{Y>0}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y>0}^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{P}(Y>0)}$$

En passant au carré, on a $\mathbb{E}(Y)^2 \leq \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{P}(Y>0)$, donc $\mathbb{P}(Y>0) \geq \frac{\mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$, i.e.

$$\mathbb{P}(X-m > -\epsilon) \geq \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+\sigma^2}$$

Et on obtient le résultat en passant au complémentaire.
3) En remplaçant X par $-X$, on obtient :

$$\mathbb{P}((-X)-(-m) \leq -\epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\epsilon^2}$$

Et donc on obtient $\mathbb{P}(-X+m \leq -\epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\epsilon^2}$. On somme avec le 2) pour obtenir le résultat demandé. Cette inégalité est meilleure que B-T quand $\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\epsilon^2} < \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$, i.e. $\sigma > \epsilon$.

Solution 5

Soit $Z = X+Y$, et on va utiliser les fonctions génératrices de X, Y, Z, dont les coefficients de la série sont notés x_n, y_n, z_n. On sait que $x_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, et $y_n = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$. Par indépendance des deux variables aléatoires, on a $G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t)$. Puisqu'on a deux séries convergeant absolument, on peut utiliser le produit de Cauchy : $z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} c_n &= e^{-\lambda-\mu}\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

Solution 6

1) $G_U = \sum_{k=2}^{1} 2\frac{t^k}{11} = \frac{t^2}{11}(t^10 + \cdots + 1)$.
2) Puisqu'ils sont indépendants, on a $G_{X_1+X_2} = G_{X_1}G_{X_2}$. À gauche, on a un polynôme en t de degré 12, et à droite c'est aussi un produit de polynômes de degrés au plus 6, donc exactement égaux à 6, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = 6) = \mathbb{P}(X_2 = 6) \neq 0$. On peut écrire $G_{X_i}(X) = X\phi_i(X)$, avec ϕ_i un polynôme. Alors, on a :

$$\phi_1\phi_2 = \frac{t^{10}+\cdots+1}{11} = \frac{1-t^{11}}{(1-t)^{11}}$$

dont les racines sont donc les racines 11^e de l'unité sauf 1, donc toutes complexes (car 11 est impair). Ainsi, les racines des ϕ_i sont toutes complexes, ce qui est impossible car ce sont des polynômes réels de degrés impairs.
3) La réponse qu'on attends, c'est de dire qu'on vient de montrer que c'est impossible. Seulement, je n'ai pas précisé que les deux dés étaient pipés de la même manière (identiquement distribués), ni que les deux dés étaient indépendants (on peut imaginer des dés qui s'adaptent l'un à l'autre).