Colle semaine 2

Pierre Le Scornet

9 octobre 2020

Cours 1

Énoncer et démontrer le théorème de comparaison série-intégrale.

Cours 2

Énoncer et démontrer le théorème de comparaison sur les séries, et l'appliquer aux cas de l'équivalence de suites positives.

Cours 3

Énoncer et démontrer la règle de d'Alembert.

Exercice 1 - *

1) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante telle que $\sum u_n$ converge, alors $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. *Indication : utiliser la convergence du reste de la série.*
2) La réciproque est-elle vraie ? Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 2 - *

Notons $u_n = \frac{1}{\ln n}\left(2 + \frac{3^2}{2^3} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)$, pour $n \geq 2$. Montrer que cette suite converge et calculer sa limite.

Exercice 3 - *

Étudier les séries de terme général $e^{\sin n}, \sin^2\left(\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right), \frac{n^n(n!)^2}{(3n)!}$

Exercice 4 - **

Théorème de réarrangement de Riemann
0) Soit ϕ une bijection sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\phi(n) \geq n_0$.
1) Montrer que si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_{\phi(n)}$ l'est aussi.

2) Supposons que $\sum u_n$ est semi-convergente, et notons a_n la suite des termes positifs ou nuls de u_n et b_n la suite des termes négatifs. Montrer qu'il existe une permutation de $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\phi(n)}$ tend vers α.

Exercice 5 - **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. on définit $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$.
1) Supposons pour cette question que $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} u_n$? de $\sum_{n\geq 0} v_n$?
2) Supposons que si la série à termes réels $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$.
3) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\lim_{+\infty} \frac{f'}{f} = -\infty$. Montrer que $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent de son reste.

Solution 1

1) On epsilonne le fait que le reste de la série tende vers 0 :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=n_\epsilon+1}^{+\infty} u_n < \epsilon$$

Alors par décroissance de u, on a :

$$\forall p > n_\epsilon, (p - n_\epsilon)u_p \leq \sum_{n=n_\epsilon+1}^{p} u_n < \epsilon$$

et puisque $n_\epsilon u_p \longrightarrow_{p\to+\infty} 0$, on a bien $pu_p < \epsilon$ à partir d'un certain rang.
2) Elle n'est pas vraie, par exemple $\sum \frac{1}{n\ln n}$

Solution 2

On va utiliser la sommation des relations de comparaison sur la somme :

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{n}$$

Ainsi, la somme est équivalente à nH_n, H étant la série harmonique, donc u_n converge vers e.

Solution 3

La première est minorée par e^{-1}. Pour la deuxième, il suffit de remarquer que c'est égal à $\sin^2\left((-1)^n\frac{\pi}{n}\right) = \sin^2\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{n^2}$ dont la série converge. Pour la troisième, on utilise l'équivalent de Stirling sur la factorielle ou on applique la règle d'Alembert.

Solution 4

0) Soit $N = 1 + \max_{i \in [\![0; n_0 - 1]\!]} \phi^{-1}(i)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \notin [\![0; n_0 - 1]\!]$ car $n > \phi^{-1}(i), \forall 0 \leq i \leq n_0$. On a donc $\phi(n) \geq n_0$.
1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\phi(k)} \leq \sum_{i=0}^{\max_{0 \leq j \leq n} \phi(j)} u_i$$

et le terme de droite converge puisque $\max_{0 \leq j \leq n} \phi(j)$ tend vers $+\infty$ (croissant et non borné), donc la série $\sum |u_{\phi(n)}|$ est majorée et $\sum \phi(n)$ est absolument convergente.
2) On note n_0^+ le premier entier tel que $A_0 := \sum_{k=0}^{n_0^+} a_k > \alpha$. Alors puisque $\sum_{k=0}^{n_0^+ - 1} a_k \leq \alpha$, on a $|\sum_{k=0}^{n_0^+} a_k > \alpha| \leq a_{n_0^+}$. De même, on va noter $n_0^- \geq n_0^+$ le premier entier tel que $A_0 + B_0 := A_0 + \sum_{k=0}^{n_0^-} b_k < \alpha$. Alors par le même argument, on a $|A_0 + B_0 - \alpha| \leq b_{n_0^-}$. On construit par récurrence avec la même méthode deux suites strictement croissantes $(n_k^+)_k$ et $(n_k^-)_k$ telles que pour $A_k = \sum_{j=0}^{n_k^+} a_k$ et $B_k = \sum_{j=0}^{n_k^-} b_k$, $|A_k + B_{k-1} - \alpha| < a_{n_k^+}$ et $|A_k + B_k - \alpha| < -b_{n_k^-}$. On remarque que tant qu'on a pas atteint n_k^-, on n'est pas passé en dessous de α donc on a toujours $|A_k + \sum_{j=0}^{i} b_j - \alpha| < a_{n_k^+}$ pour $n_{k-1}^- < i < n_k^-$, et de même tant qu'on a pas atteint n_{k+1}^+ on n'est pas passé au dessus de α et donc on a toujours $|\sum_{j=0}^{i} a_j + B_k - \alpha| < -b_{n_k^-}$ pour $n_k^+ < j < n_{k+1}^+$
Cette construction nous donne une permutation de $\mathbb{N}$ (prendre n_0^+ indices des termes positifs de u_n, puis n_0^- négatifs, puis n_1^+ positifs) et la distance de la somme correspondante et de α est majorée par $a_{n_0^+}$, puis $-b_{n_0^-}$, puis $a_{n_1^+}$, puis $b_{n_1^-}$, etc. La distance tend donc vers 0 puisque ces deux suites tendent vers 0 (car u_n tend vers 0), donc la somme permutée tend vers α.

Solution 5

1) C'est du cours pour $\sum u_n$, et pour v_n il suffit de regarder comment se comporte $1 + n^{2-\alpha}$, et donc pour $\alpha < 1$ la série des v_n converge, sinon elle diverge. On remarque que dans ce cas, les deux séries ne peuvent pas converger ensemble.
2) On utilise l'inégalité $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (qui vient de $(a-b)^2 \geq 0$).
3) Par l'absurde, supposons qu'elles convergent toutes les deux. Alors $\sum \sqrt{u_n v_n}$, et $n^2 u_n \to +\infty$. Ainsi, $u_n v_n \sim \frac{u_n}{1+n^2 u_n} \sim \frac{1}{n^2}$, ce qui contredit $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Solution 6

Soit $A > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{f'(n)}{f(n)} \leq A$. Alors on a pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a :

$$\ln \frac{f(n+p)}{f(n)} = \int_n^{n+p} \frac{f'(x)}{f(x)} dx \leq \int_n^{n+p} A = pA$$

Ainsi, on a $0 \leq f(n+p) \leq f(n) e^{pA}$ et donc $\sum f(p)$ converge. De plus, on peut sommer sur $p \in \mathbb{N}$

et faire converger cette somme :

$$0 \leq R_{n+1} \leq f(n) \sum_{0}^{+\infty} e^{pA} = f(n) \frac{e^A}{1 - e^A}$$

Or $\frac{e^a}{1-e^a} \rightarrow_{A \rightarrow -\infty} 0$ On a démontré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq R_{n+1} \leq \epsilon f(n)$, d'où $R_{n+1} = o(f(n))$ et $R_n = f(n) + o(f(n))$, i.e. $R_n \sim f(n)$.