Colle semaine 4 MP*

Pierre Le Scornet

9 octobre 2020

Cours 1

Énoncer et démontrer le théorème de sommation par paquets, dans le cas positif et le cas sommable.

Cours 2

Compléter et démontrer que pour $\varphi : \mathbb{N} \to I$ bijective, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ssi la série $\sum u_{\varphi(n)}$ ... ? Distinguer deux cas.

Cours 3

Énoncer et démontrer la convergence d'un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Exercice 1 - *

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$. Est-ce que ces familles sont sommables ? :

$$\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}, \left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

Exercice 2 - *

On définit la fonction $f : x \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
1) Montrer que la fonction f est bien définie.
2) Établir que pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $f(x)f(y) = f(x+y)$.

Exercice 3 - *

Écrire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ comme la somme d'une famille, montrer qu'elle est bien sommable et calculer sa somme.

Exercice 4 - **

Soit $x \in]-1;1[$.
1) Montrer que la famille $(x^{nk})_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$, avec $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 5 - **

On note $l^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles complexes sommables sur $\mathbb{Z}$. On note $\|u\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$ (c'est une norme sur notre ensemble.
1) Soit $u, v \in l^1(\mathbb{Z})$. Montrer que la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2) On définit le produit de convlution $(u * v)_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u * v \in l^1(\mathbb{Z})$, puis majorer $\|u * v\|$ en fonction de $\|u\|$ et $\|v\|$.
3) Montrer que $*$ est associative, commutative et possède un élément neutre.
4) On définit $u \in l^1(\mathbb{Z})$ nulle sauf pour les termes $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$. Montrer que u n'est pas inversible pour la loi $*$.

Exercice 6 - *

Pour $n \geq 0$, soit $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.
1) Montrer que la série de terme général w_n converge.
2) Calculer sa somme.

Exercice 7 - Bonus

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$$

Solution 1

On remarque que ces trois sommes sont à termes positifs.
1) C'est du cours.
2) Pour la première, on va utiliser le théorème de sommation par paquets : on a $I = (\mathbb{N}^*)^2$, on va prendre $I_n = \{(p,q) \in I, p+q = n\}$. Par le théorème de sommation par paquets, la première famille est sommable ssi $\left(\frac{|I_n|}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est. Or $|I_n| = (n-1)$, donc le problème revient à la convergence de la série des $\frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. La famille est donc sommable ssi $\alpha > 2$.

Solution 2

1) Pour $x = 0$ c'est évident, et pour $x \neq 0$ par la règle de d'Alembert on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$, donc la série converge absolument.
2) On écrit donc le produit de sommes de séries comme somme d'une série de Cauchy :

$$f(x)f(y) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{y^l}{l!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)$$

, donc

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y)$$

Solution 3

On va noter $a_{kn} = \frac{1}{k!}\mathbb{1}_{n\leq k}$ pour $k, n \in \mathbb{N}$ notre famille de réels positifs. Montrons que cette famille est sommable. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{kn} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} = \frac{k+1}{k!}$. Par le théorème d'interversion des sommes, on a que $\sum_{k,n\in\mathbb{N}} a_{kn} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{kn} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e$.

Solution 4

1) Pour le montrer, il suffit de remarquer que c'est une famille positive. Par le théorème d'interversion des signes sommes, on a $\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{nk} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^{nk}\right)\right)$. Or la somme interne est égale à $\frac{x^n}{1-x^n}$, dont la valeur absolue est équivalente à $|x|^n$ quand $n \to +\infty$ (car $1 + x^n \to 1$), dont la série converge. Ainsi, la famille est sommable.
2) On voit que notre raisonnement de la première question nous dit que la somme de notre famille est égale au terme de gauche. On va donc utiliser le théorème de sommation par paquets écrire cette somme sous une autre forme. On va prendre une partition de $(N^*)^2$ $I_j = \{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, nk = j\}$. $(I_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$, donc par le théorème de sommation par paquets, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{(n,k)\in I_j} x^{nk} = \sum_{j=1}^{+\infty} d(j)x^j$ car I_j est en bijection avec l'ensemble des diviseurs de j (en choisissant n diviseur de j, k est unique).

Solution 5

1) Puisque la famille v est sommable, elle est bornée par $M > 0$. On a donc $|u_k v_{n-k}| \leq M|u_k|$ qui est sommable sur $\mathbb{Z}$, donc notre famille est sommable.
2) Le 1) nous dit que $u * v$ est bien définie. D'une part, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k|\|v\|$. $(u_k v_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc sommable, et sa somme $(u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi sommable de somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$, par interversion des sommes, $u * v$ est bien sommable. On a alors :

$$\|u * v\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \|u\|\|v\|$$

3) Soit $u, v, w \in l^1(\mathbb{Z})$. Montrons que $(u * v) * w = u * (v * w)$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned}
((u * v) * w)_n &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (u * v)_k w_{n-k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j v_{k-j} \right) w_{n-k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j v_{k-j} w_{n-k} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} u_j v_{k'} w_{(n-j)-k'} \text{ par } k' = k - j \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j (v * w)_{n-j} = (u * (v * w))_n
\end{aligned}$$

d'où l'associativité. De plus, $(u*v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k'\in\mathbb{Z}} u_{n-k'} v_{k'} = (v*u)_n$ par le changement d'indice $k' = n - k$, d'où la commutativité. Enfin, la suite $e = (\mathbb{1}_{n=0})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un élément neutre, puisque $(u * e)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e_{n-k} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4) Supposons qu'il existe v tel que $u * v = e$. Alors on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = v_n - v_{n-1} = e_n$ donc on a v est constante sur $[\![0; +\infty]\!]$ ($v_0 = v_1 = \cdots = v_n = \dots$), et de même $v_0 - 1 = v_{-1} = v_{-2} = \dots$. La famille v n'est donc pas sommable, ce qui est absurde.

Solution 6

1) On majore la somme par $\exp 4$, et la somme des 2^{-n} converge donc la somme des w_n converge.
2) On écrit le produit de Cauchy des séries de terme $\frac{2^n}{n!}$ et 2^{-n}. La première a pour somme e^2, la deuxième 2. Ainsi, on a $2e^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} 2^{-(n-k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.