Colle semaine 5 MP

Pierre Le Scornet

3 novembre 2020

Exercice 1 - *

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :
1) $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ pour $x \in [a; +\infty[$ avec $a \geq 0$.
2) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2 - *

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.
1) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et la limite de I_n. En déduire que f_n ne converge pas uniformément sur $[0; 1]$.
3) Démontrez le directement.

Exercice 3 - *

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Montrer la véracité ou non des assertions suivantes si elle converge simplement ou uniformément vers f.
1) Si les f_n sont croissantes, alors f aussi,
2) Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi,
3) Si les f_n sont périodiques de période T, alors f aussi,
4) Si les f_n sont continues, alors f aussi (sans démonstration, mais avec un contre-exemple éventuellement).

Exercice 4 - **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$ deux réels. Pour $x \in [a; b]$, notons $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$.
1) Rappeler le théorème de Heine.
2) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a; b]$.
3) Démontrer que la suite f_n converge uniformément sur $[a; b]$.

Exercice 5 - **

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que la série des u_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.. On notera $S(x)$ sa somme.
2) Montrer que S est continue et monotone, et déterminer sa limite en $+\infty$.
3) Justifier que S admet une limite (finie ou infinie) en 0, puis démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, et conclure.

Exercice 6 - *

Soit $f : \mathbb{R} : \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.
1) Justifier qu'à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$ pour tous $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
2) Que peut-on dire de $P_n - P_N$?
3) En déduire que f est un polynôme.

Solution 1

1) Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $e^{-nx}\sin(2nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car le sinus est borné), donc la suite converge simplement vers la fonction nulle. Cependant, on remarque que $f(x) = g(nx)$, avec $g : x \mapsto e^{-x}\sin(2x)$ qui est non nulle. Ainsi, $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}^+} = \|g\|_{\mathbb{R}^+} > 0$ donc si $a = 0$, on n'a pas la convergence uniforme. Si $a > 0$, puisque $g \to_{+\infty} 0$, on a $\|f_n - f\|_{[a;+\infty[} = \|g\|_{[na;+\infty[} \to 0$. Ainsi, on a la convergence uniforme pour $a > 0$.
2) D'une part, sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions en x converge vers 0 pour $x \neq 0$ (à x fixé, on a suite géométrique) et est constante égale à 1 pour $x = 0$. Ainsi, la suite converge simplement vers δ_1 sur $\mathbb{R}$ (et il suffit de la restreindre à $[a;+\infty[$ pour l'autre cas). Puisque la convergence uniforme préserve la continuité et que la limite simple des f_n n'est pas continue, alors les f_n ne convergent pas uniformément. Par décroissance des f_n à n fixé sur $[a;+\infty[$, on peut montrer la convergence uniforme en calculant $f_n(a)$ et en montrant qu'il tend vers 0.

Solution 2

1) Soit $x \in [0;1]$. Alors la suite $f_n(x)$ est constante égale à 0 pour $x = 0$ et égale à $\frac{2^n x}{1+2^n nx^2} \equiv \frac{1}{nx} \to 0$, donc la suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle.
2) $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \left[\frac{\ln(1+2^n nx^2)}{2n}\right]_0^1 = \frac{\ln(1+2^n n)}{2n} \to \frac{\ln 2}{2}$. Comme ce n'est pas $0 = \int_0^1 0dx$, on a par la contraposée du théorème d'intégration uniforme que la suite de fonction ne converge pas uniformément.
3) On cherche un certain x_n tel que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0. On peut prendre $x = \frac{1}{n}$, alors on a $f_n(x_n) = \frac{\frac{2^n}{n}}{1+\frac{2^n}{n}} \to 1$, et donc la norme infinie de f_n est au moins 1 pour tout n, elle ne tend donc pas vers 0 et l'on a pas la limite uniforme.

Solution 3

Remarquons que si l'on montre le résultat pour la cv simple, il est vrai pour la cv uniforme. Ainsi :
1) Si f_n est croissante, alors pour tout $x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et en passant à la limite simple, on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. On a donc l'assertion vraie dans les deux cas.
2) Le contre-exemple $f_n(x) = \exp(nx)$ sur $[-\infty; -1[$ tend simplement et uniformément vers 0 qui n'est pas strictement croissante.
3) Supposons que f_n est T-périodique, alors on a $\forall x \in I, \forall k \in \mathbb{Z}, f_n(x+kT) = f_n(x)$. En fixant x, k et en passant à la limite simple en n, on obtient donc $f(x+kT) = f(x)$, et f est bien T-périodique.
4) C'est très important de connaître un tel exemple de suite de fonctions continues dont la limite ne l'est pas : par exemple, $x \mapsto x^n$ sur $[0; 1]$. Dans le cas uniforme, c'est vrai par le cours.

Solution 4

1) Le théorème de Heine nous dit qu'une fonction continue sur un fermé y est absolument continue.
2) On reconnaît une somme de Riemann : $f_n(x) \to \int_x^{x+1} f(t)dt$.
3) Il nous faut donc majorer $|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt|$ pour $x \in [a; b]$.

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| &\leq \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)dt\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} \left|f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)\right| dt\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'uniforme continuité de f sur $[a; b+1]$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $u, v \in [a; b+1]$, $|u - v| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$. Or pour $t \in \left[x + \frac{i}{n}; x + \frac{i+1}{n}\right]$, on a $\left|x + \frac{i}{n} - t\right| \leq \frac{1}{n}$, donc pour n assez grand, on a $\left|x + \frac{i}{n} - t\right| < \eta$, et donc $\left|f\left(x + \frac{i}{n}\right) - f(t)\right| < \varepsilon$. Ainsi, on a :

$$\left|f_n(x) - \int_x^{x+1}\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} \varepsilon = \varepsilon$$

d'où la convergence uniforme.

Solution 5

1) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{n+n^2x} \sim \frac{1}{n^2x}$ dont la somme converge, d'où la convergence simple.
2) Puisque les fonctions u_n sont décroissantes, sa somme l'est aussi. Ainsi, pour $x \in [a; +\infty[$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n+n^2a}$ dont la somme converge, donc la série de fonctions converge normalement sur $[a; +\infty[$, donc elle y est continue comme somme (normale) de fonctions continues.
Puisque la convergence est normale, donc uniforme, sur $[1; +\infty[$, on peut inverser les limites : $\lim_{+\infty} \sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \lim_{\infty} u_n = 0$.
3) Puisque la fonction S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une limite en 0 qui est soit finie sur $+\infty$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors, par positivité des termes, on a $S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x}$, donc en passant à la limite en 0, on a $\lim_0 S \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Or cette somme diverge vers $+\infty$, donc $\lim_0 S = +\infty$.

Solution 6

1) C'est le critère de Cauchy de la convergence des suites : si l'on veut le prouver sans le mentionner, on peut juste prendre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire on obtient le résultat.
2) Puisque en $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, le fait que le polynôme $P_n - P_N$ soit borné est équivalent au fait d'être constant. Ainsi, $P_n - P_N = c_n$, $c_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq N$.
3) Ainsi, $f - P_N = \lim(P_n - P_N)$ est une constante, donc f est un polynôme.