Exercice 1 - *

Soit A la matrice réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ telle que $a_{i,j} = \delta_{i+1}(j)$.
1) Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2) Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Exercice 2 - *

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Est-elle trigonalisable ? Si oui, en proposer une trigonalisation.

Exercice 3 - *

Soit A un anneau commutatif. On appelle *nilradical* de A l'ensemble des éléments nilpotents de cet anneau, c'est à dire $\{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0\}$. Montrer que le nilradical de A est un idéal de A.

Exercice 4 - *

1) Montrer que si un anneau commutatif A ne possède que deux idéaux $\{0\}$ et A, alors c'est un corps.
2) Supposons que A est commutatif et intègre et admet un nombre fini d'idéaux. Montrer que c'est un corps.

Exercice 5 - **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.
1) Montrer que B n'est pas inversible.
2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $AB^k - B^kA = kB^k$. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 6 - **

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, il existe une condition nécessaire et suffisante sur M pour que M et $2M$ soient semblables. *Indication : s'intéresser aux valeurs propres de M.*
On pourra utiliser le résultat suivant : si A est nilpotente, alors elle est semblable à une matrice nulle sauf sur la sur-diagonale (où elle a des zéros ou des uns).

Solution 1

1) On remarque que cette matrice est nilpotente. Supposons qu'elle l'est, avec $D = PAP^{-1}$. Alors puisque A est diagonalisable, on a donc $A^n = 0 = PD^nP^{-1}$, donc $D^n = 0$, donc $D = 0$, donc $A = P0P^{-1} = 0$, ce qui est absurde, donc A n'est pas diagonalisable (sauf si $n = 1$).
2) L'indice de nilpotence de A est n (se vérifie en calculant A^k par récurrence), et si un tel B existe, alors il est nilpotent ($B^{2n} = A^n = 0$). Ainsi, $B^n = 0$ et donc avec $n \geq 2$ on a $A^{n-1} = B^{2n-2} = B^nB^{n-2} = 0$, ce qui contredit l'indice de nilpotence de A. Ainsi, un tel B n'existe pas.

Solution 2

On va calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = (X-1)(X(X-2)+1) = (X-1)^3$. Ainsi, on va chercher à déterminer le sous-espace propre de la valeur propre 1 : $(x, y, z) \in \ker(A - I_3) \Leftrightarrow (y, z) = (-z, y + 2z) \Leftrightarrow y + z = 0$. Ainsi, ce sous-espace est de dimension 2 et on a une base de deux vecteurs propres : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Enfin, on prend un autre vecteur pour compléter la base et dans cette base, la matrice de A est triangulaire supérieure. On peut par exemple essayer de la trigonaliser en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 3

On va appliquer la définition d'un idéal (dans un anneau commutatif). D'une part, on a $0 \in N$, et pour $x, y \in N$, n, m leurs indices de nilpotence, $(x+y)^{n+m-1} = \sum_{i=0}^{n+m-1} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n+m-1-k}$ (on peut utiliser la formule du binôme par commutativité de la somme dans A). Dans cette somme, tous les termes sont nuls (car l'un ou l'autre des exposants est supérieur à l'indice de nilpotence) donc $x + y \in N$. Ainsi, N est un sous-groupe additif de A. De plus, en conservant les mêmes notations, on aura $(xy)^{nm} = x^{nm}y^{nm} = 0$ (par commutativité du produit dans A), donc $xy \in N$.

Solution 4

1) Soit $x \in A$. L'idéal engendré par x ne peut être que $\{0\}$ ou A : dans le premier cas, $x \in \{0\}$ donc $x = 0$, et dans le deuxième cas, $1 \in A$ donc il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$. Ainsi, x est inversible. Ainsi, x est nul ou inversible. Donc A est un corps.
2) Soit $x \in A \setminus \{0\}$. On va considérer la suite d'idéaux $I_n = \langle x^n \rangle$. Puisque A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux, il existe $n < m$ tel que $I_n = I_m$. Alors, on a a^n qui s'écrit comme $a^m.x$, $x \in A$. Ainsi, $a^n - a^m.x = 0$, i.e. $a^n.(1 - a^{m-n}.x) = 0$. Puisque l'anneaux est intègre et $a \neq 0$, on a $a^{m-n}.x = 1$, donc a est inversible d'inverse $a^{n-m-1}.x$.

Solution 5

1) On va raisonner par l'absurde. Supposons que B est inversible. Alors $tr(B^{-1}AB - A) = tr(I_n) \Rightarrow 0 = n$, d'où une contradiction (la trace est préservée par la conjugaison).
2) On va le montrer par récurrence, sachant que l'on connaît le cas $n = 1$. Supposons que l'on a $AB^k - B^kA = kB^k$. Alors, $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B(AB^k - B^kA) + B^kAB - BAB^k = 2kB^{k+1} + B(B^{k-1}A - AB^{k-1})B = 2kB^{k+1}(k-1)B^{k+1} = (k+1)B^{k+1}$. D'où la relation par récurrence. On a donc $tr(B^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc B est nilpotente (pour montrer ça, on peut trigonaliser B dans $\mathbb{C}$ et la trace sera la somme des valeurs propres avec multiplicité puissance k et sera nulle. On peut donc remplacer par linéarité les λ_i^k par n'importe quel $P(\lambda_i)$ et en choisissant bien P avec un polynôme d'interpolation, on a $\lambda_i = 0$ donc toutes le spectre de B est $\{0\}$ et on a fini).

Solution 6

Soit λ une valeur propre de M avec un vecteur propre x, et P inversible tel que $2M = P^{-1}MP$. Alors, on a $M(Px) = P(2M)x = 2\lambda Px$, donc Px est un vecteur propre de valeur propre 2λ. Ainsi, par une récurrence immédiate, tous les $2^n\lambda$ sont valeurs propres de M. Or M en possède un nombre fini, donc $\lambda = 0$. En trigonalisant A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en A' (ce qui est toujours possible), on n'a donc que des 0 sur la diagonale, et donc A' est strictement triangulaire supérieure, donc nilpotente. Ainsi, A est nilpotente.
Supposons que M est nilpotente, alors $2M$ l'est aussi. De plus, on peut utiliser l'indication sur M : M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & v_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Dans une base B. Dans la base $B' = (b_1, 2b_2 \dots 2b_n)$,

la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à M est $\begin{pmatrix} 0 & 2v_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 2v_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, i.e. exactement la matrice de $2M$ dans la base B. Ainsi, la M et $2M$ ont la même matrice dans deux bases différentes, donc sont semblables.