# Simplexes Contigus

Arnaud Golfouse, Pierre Le Scornet

23 octobre 2018

## Introduction

On se pose la question suivante : combien de simplexes deux-à-deux contigus de dimension d peut-on placer dans $\mathbb{R}^d$ ?

Intuitivement, un simplexe de dimension d est un ensemble de d+1 points formant un volume de dimension d. Il s'agit de la généralisation du triangle ou du tétrahèdre.
Si A, B sont des d-simplexes, A et B contigus signifie que A∩B est de dimension d-1.

On verra alors qu'on peut conjecturer que le nombre recherché est $2^d$, et on donnera des bornes qui vont dans ce sens.

## 1 Définitions

**Définition 1.1.** Soit $d \geq 1$. Un **d-simplexe** est une partie S de $\mathbb{R}^d$ telle que $\exists (x_0, x_1 \dots x_d) \in (\mathbb{R}^d)^{d+1}$, S= $Conv(\{x_0, x_1 \dots x_d\})$ et $\lambda_d(\mathrm{S}) > 0$.
$x_0, x_1 \dots x_d$ sont appelés les **extrémités** du simplexe S.
Si $i \in [\![0, d]\!]$, $Conv(\{x_0, x_1 \dots x_d\} \setminus \{i\})$ est appelé une **face** de S. Ainsi S a $\binom{d+1}{d} = d+1$ faces.

**Définition 1.2.** Soit $\mathrm{S}_1$ et $\mathrm{S}_2$ deux d-simplexes. On dit que $\mathrm{S}_1$ et $\mathrm{S}_2$ sont **contigus** si $\lambda_{d-1}(\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2) \in ]0, +\infty[$.

On pose alors $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $d \mapsto$ nb maximal de d-simplexes de $\mathbb{R}^d$ deux-à-deux contigus.

**Conjecture :** $f(d) = 2^d$.

## 2 Premier théorème

**Théorème 2.1.** *Pour tout $d \geq 2$, il existe une famille de $2^d$ d-simplexes de $\mathbb{R}^d$ deux-à-deux contigus, ainsi qu'une droite transverse qui rencontre l'intérieur de chacun d'entre eux.*

## 3 Deuxième théorème

**Théorème 3.1.** *Pour tout $d \geq 1$, on a $f(d) < 2^{d+1}$.*

*Démonstration.* Soient $P_1, P_2, \ldots P_r$ une famille de d-simplexes 2 à 2 contigus.
On pose $\mathscr{H}$ l'ensemble des hyperplans engendrés par une face d'un des simplexes.
Alors $\mathscr{H}$ est fini il y a au plus $r(d+1)$ telles faces. On note donc $\mathscr{H} = \{H_1, H_2, \ldots H_s\}$.
Chacun de ces hyperplans sépare $\mathbb{R}^d$ en deux ; on choisit alors un côté comme étant le côté positif, noté $H_i^+$, et l'autre le côté négatif, noté $H_i^-$.
On pose alors $\forall i \in [\![1, r]\!],\ v^i \in \{0, -1, 1\}^s$ tel que $\forall j \in [\![1, s]\!]$,

$$v_j^i = \begin{cases} 1 \text{ si } P_i \text{ a une face dans } H_j \text{ et } P_i \subset H_j^+ \\ -1 \text{ si } P_i \text{ a une face dans } H_j \text{ et } P_i \subset H_j^- \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors les propriétés :

- Chaque $v_i$ a exactement $s-(d+1)$ coefficients nuls (car chaque $P_i$ a d+1 faces) ;
- Si $i \neq j$, il existe $k \in [\![1, s]\!]$ tel que ($v_k^i = 1$ et $v_k^j = -1$) ou ($v_k^i = -1$ et $v_k^j = 1$). En effet, on travaille avec des simplexes 2 à 2 contigus ; ainsi $P_i$ et $P_j$ ont chacun une face avec un hyperplan en commun, et sont chacun d'un côté de cet hyperplan.
- $P_i = \bigcap\limits_{j\ tq\ v_i^j = 1} H_j^+ \cap \bigcap\limits_{j\ tq\ v_i^j = -1} H_j^-$

$\square$

## Références


[1] Martin A. and Günter Z. *Simplexes Contigus.* Springer, 2006.

[2] Joseph Z. Neighborly families of $2^d$ d-simplices in $E^d$. *Geometriae Dedicata*, pages 505–507, 1981.