Théorème 1. Pour $d \geq 3$, la marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par récurrence par $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$, avec les ξ_i iid de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$, est transiente.

Démonstration. Plaçons nous maintenant dans le cas où $d \geqslant 3$. Rappelons que les θ_n sont i.i.d et notons φ leur fonction caractéristique $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que pour tout vecteur $t = (t_1, \dots, t_n)$:

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\langle t, \theta_1\rangle\right)\right] = \frac{1}{d}(\cos(t_1) + \cdots + \cos(t_d)).$$

ETAPE 1 : Une première identité. On va prouver que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{2k} = 0_d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{\mathrm{d}t}{1-\varphi(t)^2}.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$. On note :

$$I_d(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \exp\left(i\langle x, t\rangle\right)\mathrm{d}t.$$

On vérifie grâce au théorème de Fubini que $I_d(x) = \prod_{j=1}^d I_1(x_j)$. Il s'ensuit que $I_d(x) = 1$ si $x = 0_d$ et $I_d(x) = 0$ sinon. En effet, supposons par exemple que $x_1 \neq 0$, alors $I_1(x_1) = \sin(x_1\pi)/x_1\pi = 0$ car $x_i \in \mathbb{Z}$. Soit $\varphi_{X_n} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ la fonction caractéristique de X_n. Par le théorème de Fubini, et ce qui précède, on montre très simplement qu'alors :

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi_{X_n}\mathrm{d}t = \mathbb{E}\left[I_d(X_n)\right] = \mathbb{P}(X_n = 0_d).$$

Ensuite, étant donné que $X_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$, et que par hypothèse les θ_i sont i.i.d., on en déduit alors que $\varphi_{X_n} = \prod_{j=1}^n \varphi_{\theta_j} = \varphi(t)^n$. Par une permutation série-intégrale légitime puisqu'on intègre sur le compact $[-\pi,\pi]^d$ une fonction continue, il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{2k} = 0_d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi(t)^{2k}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi(t)^{2k}\mathrm{d}t.$$

Enfin, le fait que pour presque tout $t \in \mathbb{R}^d$, $|\varphi(t)^2| < 1$ permet de conclure que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{\mathrm{d}t}{1-\varphi(t)^2}.$$

ETAPE 2 : Finitude de l'intégrale en question. Les points où la fonction $t \mapsto 1 - \varphi(t)^2$ s'annule sont 0_d et les $(\varepsilon_1\pi, \dots, \varepsilon_d\pi)$ où les ε_i valent 1 ou -1.
Il s'agit donc de montrer que la fonction question admet des limites finies en chacun de ces points.
Un développement limté à l'ordre 2 en 0_d de φ donne que $\varphi(t) = 1 - \|t\|^2/2d + o(\|t\|^2)$ et alors $\frac{1}{1-\varphi(t)^2} \underset{t\to 0_d}{\sim} \frac{d}{\|t\|^2}$. La fonction de l'équivalent est localement intégrable au voisinage de 0. Pour le voir, considérons une boule ouverte centrée en 0 de rayon $\varepsilon > 0$, et faisons un changement de variable sphérique $t = r\alpha$ où $r \geqslant 0$ et $\alpha \in \mathbb{S}^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Le changement de variable sphérique fait apparaitre une expression régulière en des fonctions cosinus et sinus. Cette expression étant continue sur le compact $\mathbb{S}^{d-1}$ elle est majorée par une constante C_1 qui ne dépend que de d. On note ensuite C_2 la constante valant le produit entre C_1 et l'intégrale sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Alors :

$$\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\|t\|^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\varepsilon}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{1}{r^2}C_1 r^{d-1}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r \leqslant C_2\int_0^{\varepsilon} r^{d-3}\mathrm{d}r.$$

Or lorsque $d \geqslant 3$ cette intégrale est convergente. Le raisonnement est le même pour les points $(\pi, \dots, \pi)$ et $(-\pi, \dots, -\pi)$. Finalement, la transience de la chaîne se déduit des deux étapes précédentes car alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0_d) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{2k} = 0_d) < +\infty.$$

□